Cvičení 9 - 8.12.2015

Příklad 1. Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné?

1. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \to V(H)$ platí pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

2. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \to E(H)$.

3. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:

$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$

4. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ platí pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

5. Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \dots, n\}$.

6. Každý graf s $n \leq 1$ je isomorfní nekonečně mnoha grafům.

Příklad 2. Ukažte, že isomorfismus dává ekvivalenci na grafech s vrcholy $V = \{1, \dots, n\}$. Nalezněte graf, jehož třída ekvivalence má $n!$ prvků.

Příklad 3. Existuje bipartitní graf na alespoň 5 vrcholech, jehož doplněk je také bipartitní?

Příklad 4. Ukažte, že dva grafy jsou isomorfní právě tehdy, když jsou isomorfní jejich doplňky.

Příklad 5. Dokažte, že každý graf s m hranami obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Příklad 6. Nalezněte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 2 (na 3 vrcholech) jako indukovaný podgraf.