

Cvičení 8 - 1.12.2015

Příklad 1. Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců. Všichni myslivci naráz vystřelí a trefí zajíce, na kterého mířili. Náhodná veličina Z určuje počet přeživších zajíců. Spočítejte střední hodnotu Z .

Příklad 2. Mějme pravděpodobnostní prostor \mathcal{C}_n všech posloupností 0 a 1 délky n . Každá posloupnost má pravděpodobnost $1/2^n$. Spočítejte střední hodnotu počtu 1 v náhodně vybrané posloupnosti.

Příklad 3. Mějme následující experiment: Házíme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Určete střední hodnotu počtu hodů.

Příklad 4. Dokažte, že náhodný graf skoro jistě obsahuje trojúhelník.

Příklad 5. Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné?

1. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \rightarrow V(H)$ platí pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

2. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \rightarrow E(H)$.
3. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \rightarrow V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:

$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$

4. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$ platí pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

5. Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \dots, n\}$.

6. Každý graf s $n \leq 1$ je isomorfní nekonečně mnoha grafům.

Příklad 6. Ukažte, že isomorfismus dává ekvivalenci na grafech s vrcholy $V = \{1, \dots, n\}$. Naleznete graf, jehož třída ekvivalence má $n!$ prvků.