Cvičení 5 - 3.11.2015

Příklad 1. Dokažte, že množina velikosti n má 2^{n-1} sudých podmnožin.

Příklad 2. Nechť R a S jsou relace na množině X a platí, že

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xSz.$$

Nalezněte protipříklad na tvrzení: R je tranzitivní právě tehdy když $S \subseteq R$.

Příklad 3. Dokažte následující vztahy početně i kombinatoricky:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Příklad 4. Určete počet

1. uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
2. uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Příklad 5. Kolik čísel zbude z $1, 2, \dots, 1000$ po vyškrtání všech násobků čísel 2,3,5 a 7?

Příklad 6. Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtverici 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.