Cvičení 4 - 27.10.2015

Příklad 1. Mějme následující relace $R, S \subseteq (\mathbb{N}^2)^2$:

1. $\big((a,b),(c,d)\big) \in R \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$.
2. $\big((a,b),(c,d)\big) \in S \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$.

U obou určete zda se jedná o částečná uspořádání, zda jsou lineární. A také nakreslete Hasseho diagram, určete nejmenší, největší, minimální a maximální prvky.

Příklad 2. Ukažte, že relace $\Delta_X = \{(x,x)|x \in X\}$ na množině X (takzvaná diagonála) je jediná relace na X, která je ekvivalencí a zároveň uspořádáním.

Příklad 3. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:

1. $X = \mathbb{N}$, $(x,y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y. A co když má být ještě $z > 1$?
2. $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a,b),(c,d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Příklad 4. Dokažte, že množina velikosti n má 2^{n-1} sudých podmnožin.

Příklad 5. Ukažte, že $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ je relace uspořádání a následně ukažte, že má nekonečně mnoho minimálních prvků.

Příklad 6. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.