Cvičení 3 - 20.10.2015

Příklad 1. Pro relaci R na množině X definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

Příklad 2. Jaké zobrazení vznikne složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací?

Příklad 3. Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

Příklad 4. Rozhodnětě, zda následující relace jsou ekvivalence.

1. $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (x, y) \in R_1 \Leftrightarrow p|(x - y)$ pro pevné $p \in \mathbb{N}$.
2. $R_2 \subseteq \mathbb{Z} \setminus 0, (x, y) \in R_2 \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$.

Příklad 5. Mějme následující relace $R, S \subseteq (\mathbb{N}^2)^2$:

1. $\big((a, b), (c, d)\big) \in R \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$.
2. $\big((a, b), (c, d)\big) \in S \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$.

U obou určete zda se jedná o částečná uspořádání, zda jsou lineární. A také nakreslete Hasseho diagram, určete nejmenší, největší, minimální a maximální prvky.