Cvičení 2 - 13.10.2015

Příklad 1. Dokažte, že každé přirozené číslo je součinem prvočísel. Zkuste pomocí tohoto tvrzení dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad 2. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Příklad 3. Dokažte, že pro každé $n \geq 4$ platí $F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2$.

Příklad 4. Dokažte, že funkce na konečné množině je prostá právě tehdy když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?

Příklad 5. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Příklad 6. Určete počet relací na n prvcích:

1. všech
2. reflexivních
3. symetrických
4. antisymetrických

Příklad 7. Nalezněte relace R a S takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 8. Pro relaci R na množině X definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

Příklad 9. Nechť jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou též reflexivní?

1. $R \cup S$
2. $R \cap S$
3. $R \setminus S$
4. $R \Delta S$
5. R^{-1}