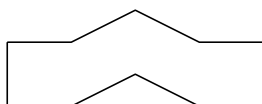


Cvičení 1 - 6.10.2015

Příklad 1. Povím vám podivuhodný příběh. Včera večer jsem šel na večeři ke známému, kterého jsem dlouho neviděl. Věděl jsem o něm, že má 3 dcery, ale nevěděl jsem, jak staré. Po večeři jsem se tedy zeptal na věk jeho tří dcer. On mi řekl, že součin jejich věků je 36. Já na to, že z toho to poznat nemůžu. Dále mi řekl, že součet jejich věků je číslo jejich domu. Vyšel jsem tedy ven a podíval jsem se na číslo domu, to mi ale stále nestačilo. A pak mi řekl, že nejstarší má zrzavé vlasy. Jak staré jsou dcery mého známého?

Příklad 2. Rozdělte následující obrázek na 7 stejných částí.



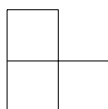
Příklad 3. Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe? Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?

Příklad 4. Trhovce měl ve stánku n jablek. Každý zákazník koupí $\frac{1}{2}$ všech jablek, které jsou v daný okamžik ve stánku a $\frac{1}{2}$ jablka k tomu. Po sedmém zákazníkovi již trhovci nezbyly žádná jablka. S kolika jablky trhovce začínal? Zkuste odvodit a dokázat vzoreček pro k zákazníků.

Příklad 5. Dokažte matematickou indukcí, že

$$4 \mid 6n^2 + 2n$$

Příklad 6. Dokažte matematickou indukcí, že šachovnice velikosti $2^n \times 2^n$ lze vydláždít kostičkami tvaru L o 3 dílkách (viz obrázek), tak že je jedno políčko není vydlážděné.



Příklad 7. Dokažte matematickou indukcí následující vzorečky:

$$\sum_{i=1}^n 4i + 5 = 2n^2 + 7n$$
$$\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

Příklad 8. Dokažme indukci následující tvrzení. Nechť p_1, \dots, p_n je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, žádné 2 nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

1. Pro $n = 2$ tvrzení platí.
2. Nechť tvrzení platí pro n_0 přímek. Mějme $n = n_0 + 1$ přímek p_1, \dots, p_n . Podle indukčního předpokladu mají přímky p_1, \dots, p_{n-1} společný bod, označme ho x . Stejně mají přímky p_1, \dots, p_{n-2}, p_n společný bod, označme ho y . Přímka p_1 leží v obou skupinách, tedy jsou na ní body x a y . Totéž platí i pro přímku p_{n-2} . Jelikož jsou přímky p_1 a p_{n-2} podle předpokladu různoběžné, protínají se jen v jednom bodu. A tedy $x = y$, což je společný bod přímek p_1, \dots, p_n .

Kde je problém?