Matematická analýza I - cvičení 12   9.1.2018

Úloha 1: Určete definiční obor následujících funkcí a určete jejich derivaci všude, kde existuje:

a) $x^2 e^{-x^2}$

b) $\ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

c) $x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

d) $\ln(\ln(\sin x))$

e) $x^{\ln x}$

f) x^{x^x}

g) $x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ v závislosti na hodnotě $a > 0$

Úloha 2: Spočítejte pomocí l'Hospitalova pravidla limity v příkladech 5, 6, 7 a 8 ze cvičení 11 (minulé cvičení). (Všimněte si, že použití l'Hospitalova pravidla nevede vždy na snazší řešení než použití známých limit.)

Úloha 3: Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, kde $a > 0$

Úloha 4: Spočítejte derivace (pokud neexistují, tak jednostranné) následujících funkcí:

a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

b) $f(x) = \max\left\{\min\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right\}$

c) $f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

Úloha 5: Nalezněte globální a lokální extrémy následujících funkcí. U každého z nich určete, jestli se jedná o ostrý či neostrý extrém.

a) $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

c) $f(x) = \ln\left(|x| - x^2\right)$

d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

Vyšetřit průběh funkce znamená zjistit/udělat následující:

1. Definiční obor, spojitost.
2. Sudost, lichost, periodičnost.
3. Limity v krajních bodech def. oboru (včetně $\pm\infty$), v bodech nespojitosti (jednostranné).
4. Určit průsečíky s osami.
5. Existence a hodnoty derivace (v problematických bodech obvykle nutno určit extra), pokud někde neexistuje, tak jednostranné derivace.
6. Intervaly monotonie.
7. Najít extrémy (u každého určit, jestli jde o min/max, lokální/globální, ostré/neostré). Nezapomeňte nejen najít body, ale napsat také funkční hodnotu!
8. Vyšetřit konvexitu, konkavitu, najít inflexní body.
9. Určit asymptoty.
10. Určit obor hodnot. Načrtnout graf funkce.

Úloha 6: Vyšetřete průběh následujících funkcí:

a) $f(x) = \arcsin(\cos x)$

b) $f(x) = \ln(4 \cdot 3^x + 2)$

c) $f(x) = \ln\left(\left|\tan \frac{x}{4}\right|\right)$

d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

e) $f(x) = x^2 e^{-x}$

f) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

g) $f(x) = x\, e^{-|x-1|}$

Úloha 7: Vyšetřete průběh následujících funkcí:

a) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = (\ln|x|)^3 - 3\ln|x|$

e) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}$