Lineární algebra II - cvičení 8 14.4.2016

Příklad 1: Nechť G je d-regulární (neorientovaný) graf. Ukažte, že d je vlastním číslem matice sousednosti A_G grafu G.

Příklad 2: Rozhodněte, zdali jsou dané matice diagonalizovatelné. (Vlastní čísla těchto matic jsme počítali minule - není nutno dělat znovu.)

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\ V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\{(1,1,-1)^T\}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2,\ V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\{(1,0,0)^T\};\ \lambda_2 = 1,\ V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\{(1,0,1)^T\};\ \lambda_3 = -1,\ V_{\lambda_3} = \operatorname{span}\{(0,1,-1)^T\}.$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\{(1,-2,1)^T\};\ \lambda_3 = 0,\ V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\{(4,4,1)^T\}.$

Příklad 3: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2,\ V_{\lambda_1} = \operatorname{span}\{(0,1,3)^T\};\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ V_{\lambda_2} = \operatorname{span}\{(1,0,1)^T, (1,4,0)^T\}.$

Je diagonalizovatelná. Diagonální tvar je například $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad 4: Rozložte následující matici na součin $\mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární a matice $\mathbf{J}$ je diagonální.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Příklad 5: Spočtěte třetí mocninu a druhou odmocnimu matic z přechozího příkladu. (Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix}$, *odmocnina:* $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} -6 & 14 & -14 \\ 49 & -97 & 161 \\ 56 & -112 & 176 \end{pmatrix}$, *odmocnina:* $\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-2 & 2-2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}-5 & 7-4\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-4 & 6-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -112 & 1 & 63 \\ -112 & 0 & 64 \end{pmatrix}$, *odmocnina:* $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}-4 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2}-4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 6: Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ spočtěte matici e^{A}.

$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^3 - 1 & \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \\ 1 & 1 + \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$.

Příklad 7: Určete A^5 a A^{-1} pro $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pomocí charakteristického polynomu.

$A^5 = \begin{pmatrix} 243 & 211 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Příklad 8: Ve městě jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů, kteří volili Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch, kteří volili Bohaté, zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. Konečně 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Předpokládejte, že toto platí i při všech násleujících volbách. Jak pak bude vypadat limitní poměrové rozložení sil v místním zastupitelstvu?

Asketičtí obsadí 1/3 *zastupitelstva, Bohatí* 1/6 *a Chudí* 1/2.