Lineární algebra II - cvičení 8 14.4.2016

Příklad 1: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $V_{\lambda_1} = \mathbb{C}^2$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$; $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,0)^T\}, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(0,1)^T\}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(-1,1)^T\}, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1,1)^T\}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$; $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,-i)^T\}, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1,i)^T\}$.

e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = e^{i\varphi}; \lambda_2 = e^{-i\varphi}$; $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,-i)^T\}, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1,i)^T\}$.

Příklad 2: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,1,-1)^T\}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$, $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,0,0)^T\}$; $\lambda_2 = 1$, $V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1,0,1)^T\}$; $\lambda_3 = -1$, $V_{\lambda_3} = \mathrm{span}\{(0,1,-1)^T\}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,-2,1)^T\}$; $\lambda_3 = 0$, $V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(4,4,1)^T\}$.

Příklad 3: Určete vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou 2, 1 *(trojnásobné) a* -1.

Příklad 4: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla, a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Zbývající vlastní číslo je 7.

Příklad 5: Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice $\mathbf{J}_n$ (tj. matice složené ze samých jedniček).

$\lambda_1 = n, V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1, \ldots, 1)^T\}$; $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{x \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Příklad 6: Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice sousednosti grafu K_n.

$\lambda_1 = n-1, V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1, \ldots, 1)^T\}$; $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = -1, V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{x \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Příklad 7: Rozhodněte, zdali jsou matice z příkladu 2 diagonalizovatelné.

a)

Není diagonalizovatelná.

b)

Je diagonalizovatelná.

c)

Není diagonalizovatelná.

Příklad 8: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2,\ V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(0, 1, 3)^T\}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ V_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(1, 0, 1)^T, (1, 4, 0)^T\}$.

Je diagonalizovatelná. Diagonální tvar je například $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.