Lineární algebra II - cvičení 6 31.3.2016

Příklad 1: Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následujícím maticím a to jak nad tělesem reálných čísel, tak i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{R}$

$\det(\mathbf{A}) = -1,\ \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$\det(\mathbf{A}) = -1 = 4,\ \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{R}$

$\det(\mathbf{A}) = 4,\ \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$\det(\mathbf{A}) = 4\ ,\ \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{R}$

$\det(\mathbf{A}) = -5,\ \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -7/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$\det(\mathbf{A}) = 0,$ *tudíž* $\mathbf{A}$ *je singulární nad* $\mathbb{Z}_5$ *a* $\mathbf{A}^{-1}$ *neexistuje,* $\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad 2: Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:

a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{R}$ zadanou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = 6, \mathbf{x} = (12/6, -6/6, 6/6, 0/6)^T = (2, -1, 1, 0)^T$.

b) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{Z}_5$ zadanou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = 4, \mathbf{x} = (1, 4, 0)^T$.

Příklad 3: Nechť $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je nějaké těleso. Určete determinant Vandermondovy matice $V_n = V_n(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$

$\det(V_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

Příklad 4: Nechť jsou dány body $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ v $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že pro každé $i \neq j$ je $x_i \neq x_j$.

a) Nejdříve pro každé $i \in \{0, \ldots, n\}$ nalezněte polynom $\ell_i(x)$ stupně nejvýše n, který splňuje následující: pro každé $j \in \{0, \ldots, n\}, j \neq i$ platí $\ell_i(x_j) = 0$ a zároveň $\ell_i(x_i) \neq 0$.

b) Pomocí ℓ_i nalezněte pro každé $i \in \{0, \ldots, n\}$ polynom stupně nejvýše, který splňuje následující: pro každé $j \in \{0, \ldots, n\}, j \neq i$ platí $\ell_i(x_j) = 0$ a zároveň $\ell_i(x_i) = y_i$.

c) Pomocí výše nalezených polynomů najděte polynom $L(x)$ stupně nejvýše n, který interpoluje dané body, tj. pro každé $i \in \{0, \ldots, n\}$ platí $L(x_i) = y_i$.

Polynomu L se říká Lagrangeův interpolační polynom.

Příklad 5: Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte kvadratický polynom (parabolu) body

a) $(-1, -9)$, $(1, -3)$ a $(2, 3)$.

Hledaný polynom je $p(x) = x^2 + 3x - 7$.

b) $(-1, 10)$, $(1, 4)$ a $(4, 25)$.

Hledaný polynom je $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$.