Lineární algebra II - cvičení 6 31.3.2016

Příklad 1: Spočítejte derminanty následujících reálných matic Sarrusovým pravidlem:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Determinant matice je -9.

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Determinant matice je 30.

Příklad 2: Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3,1,1)$, $\mathbf{b}^T = (2,1,1)$ a $\mathbf{c}^T = (2,3,2)$.

Objem rovnoběžnostěnu je 1.

Příklad 3: Spočítejte derminanty následujících reálných matic pomocí elementárních úprav:

a) $\begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Determinant matice je 1001.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Determinant matice je -3.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinant matice je -16.

d) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Determinant matice je 15.

Příklad 4: Spočítejte determinanty matic z předchozího příkladu pomocí Laplaceova rozvoje.

Příklad 5: Spočítejte derminanty následujících reálných matic:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Determinant matice je 16.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$

Determinant matice je $n!$.

Příklad 6: Určete determinanty následujících reálných matic s parametry:

a) $\begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$

Determinant matice je $abcd - ad - bc + 1$.

b) $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Determinant matice je $3a + 2b$.

c) $\begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$

Determinant je roven $a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$

Determinant matice je roven 0.

Příklad 7: Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:

a) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{R}$ zadanou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = 6, \mathbf{x} = (12/6, -6/6, 6/6, 0/6)^T = (2, -1, 1, 0)^T$.