Lineární algebra II - cvičení 5 24.3.2016

Příklad 1: Metodou nejmenších čtverců nalezněte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (1, 0, 0, -1)^T$

$\mathbf{x}' = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{3}{7})^T$

Příklad 2: Najděte lineární funkci nejlépe odpovídající daným bodům metodou lineární regrese:

a)

body	1	2	3	4	5	6
x	-2	0	2	4	6	8
y	2	1	3	5	4	6

$f(x) = \frac{31}{70}x + \frac{76}{35}$

b)

body	1	2	3	4	5	6
x	0	1	2	3	4	5
y	1	0	3	4	3	4

$f(x) = \frac{5}{7}x + \frac{5}{7}$

Příklad 3: Jsme v prostoru $\mathcal{C}[-1, 1]$ se skalárním součinem $\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Najděte ortonormální bázi podprostoru polynomů stupně nejvýše tři (označován jako $\mathcal{P}^3$).

$\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}\,(x^2 - \frac{1}{3})\,, \frac{\sqrt{175}}{\sqrt{8}}\,(x^3 - \frac{3}{5}x)\}$

Příklad 4: Jsme v prostoru $\mathcal{C}[-1, 1]$ se skalárním součinem $\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Pomocí ortogonální projekce nalezněte polynom stupně nejvýše dva který nejlépe aproximuje danou funkci. Využijte předchozího příkladu.

a) $f(x) = x^3$

$\frac{3}{5}x$

b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$

$\frac{-5-4\ln 3}{8} + (3 - 3\ln 3)x + (\frac{45}{2} - \frac{165\ln 3}{8})x^2$

c) $g(x) = \sin x$

$3(\sin(1) - \cos(1))x$

Příklad 5: Popište, jak vypadají ortogonální matice v prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$.