Lineární algebra II - cvičení 3 10.3.2016

Příklad 1: Jsme v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Pro danou matici najděte ortonormální bázi Z řádkového prostoru Gram–Schmidtovou metodou. Dále určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$Z = \{(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, (0, 1, 0, 0)^T, (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T\}$, $[\mathbf{p}]_Z = (5, 2, 1)^T$, $\mathbf{p} = (\frac{8}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})^T$.

Příklad 2: Spočtěte ortogonální projekci z předchozího příkladu přímo pomocí Gramovy matice.

Příklad 3: Jsme v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Určete ortogonální doplněk zadané množiny vektorů M.

a) $M = \{(2, -3, 2)^T, (1, -2, 1)^T\}$

$\operatorname{span}\{(-1, 0, 1)^T\}$

b) $M = \{(-1, 1, -3, 4)^T, (2, -1, 4, -7)^T, (-1, -1, 1, 2)^T, (-1, 2, -5, 5)^T\}$

$\operatorname{span}\{(-1, 2, 1, 0)^T, (3, -1, 0, 1)^T\}$

c) $M = \{(-1, 2, 1, 4)^T, (-2, 4, 1, 7)^T, (1, -2, 1, -2)^T, (-1, 2, 2, 5)^T\}$

$\operatorname{span}\{(2, 1, 0, 0)^T, (3, 0, -1, 1)^T\}$

Příklad 4: Určete matici projekce z příkladu 1.

$\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Příklad 5: Určete matici projekce na podprostor generovaný M pro M z příkladu 3a).

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Příklad 6: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (0, 1, 2, 1)^T$

$\mathbf{x}' = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})^T$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$

Všimněte si, že sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou vzájemně kolmé.

$\mathbf{x}' = (3, -2, 1)^T$