Lineární algebra II - cvičení 2   2.3.2016

Příklad 1: Určete souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (2,5,6)^T$ vzhledem k bázi $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1,2,1)^T; (1,1,-3)^T; (-7,4,-1)^T\}$

$[x]_B = (3,-1,0)$

Příklad 2: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gram-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}.$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Z = \{(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T\}.$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$Z = \{(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T, (0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})^T\}.$

Příklad 3: Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

$\mathbf{z}_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T.$

$\mathbf{z}_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T.$

$\mathbf{z}_4 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0, 0)^T.$

Příklad 4: Pro matice z předchozího příkladu určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2,2,1,5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

$[\mathbf{p}]_Z = (5,-2,1)^T,\ \mathbf{p} = (1,3,2,4)^T.$

$[\mathbf{p}]_Z = (2,-1,\frac{7\sqrt{2}}{2})^T,\ \mathbf{p} = (\frac{7}{2}, 2, 1, \frac{7}{2})^T.$

$[\mathbf{p}]_Z = (\frac{19}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{5})^T,\ \mathbf{p} = (\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 1, 5)^T.$

Příklad 5: Určete vzdálenost bodu $A = (5,5,3,3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8,-1,1,-2)^T$ a $C = (4,-2,2,-1)^T$.

Příklad 6: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (10,5,13,9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou vzájemně kolmé.

$\mathbf{x}' = (3,-2,1)^T$