Lineární algebra II - cvičení 14 26.5.2016

Příklad 1: Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy eliminace a derminantů. Pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní a její Choleského rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$ je dán maticí $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matice je pozitivně definitní a její Choleského rozklad je dán maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Matice není pozitivně definitní. Je jen pozitivně semidefinitní, a je rovna např. součinu $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ pro $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

(Těchto rozkladů dané matice lze nalézt více.)

Příklad 2: Spočtěte Choleského rozklad matice $\mathbf{A}$ a použijte ho k řešení soustavy $\mathbf{Ax} = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je $\mathbf{x} = (1, 1, -2, 0, 1)^T$.

Příklad 3: Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy na $\mathbb{K}^3$. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

a) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 - 2u_1v_2 + 2u_2v_1 - u_2v_3 - 2u_3v_1 + 2u_3v_2.$
$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 - 2v_1v_3 + v_2v_3.$

Stejnou formu vyjadřuje i $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (číslo 2 v $\mathbb{Z}_2$ odpovídá 0).

$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_3$.

$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2v_3$.

Symetrická matice této formy neexistuje.

c) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_2v_3 + u_3v_1 + 2u_3v_2$.
$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 + v_1v_3 + v_2v_3$.

Stejnou formu vyjadřuje i $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Rozhodněte, zdali platí, že $g(\mathbf{u}) > 0$ pro všechna netriviální $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$

Ano, $g(\mathbf{u}) > 0$ pro všechna $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

b) $g(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_2x_3$, řešte vzhledem k parametru a.

Je pro ostatní volby a hodnota $g(\mathbf{u}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{u}$?

Platí $g(\mathbf{u}) > 0$ pro $a \in (-1, 3)$.

Pro $a \notin (-1, 3)$ a $\mathbf{e}^1 = (1,0,0)^T$ je $g(\mathbf{e}^1) = 1$, tedy forma g může stále nabývat kladných hodnot — odpověď je tedy negativní.

Příklad 5: Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi K analytické vyjádření $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^T$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$X = \{(1,1,1,1)^T, (1,1,1,0)^T, (1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T\}$.

Určete $g(u)$ pro vektor u, který má vůči bázi X souřadnice $[u]_X = (3, 1, 0, 0)^T$.

$B_X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Analytické vyjádření zní: $g(u)_X = 4ab + 4ac + 6ad + 3b^2 + 6bc + 6bd + 3c^2 + 6cd + 2d^2$ pro $[u]_X = (a, b, c, d)^T$.

Dosazením $(3, 1, 0, 0)^T$ za $(a, b, c, d)^T$ zjistíme, že $g(u) = 15$. Tentýž výsledek lze odvodit, pokud si spočítáme souřadnice u vůči K, t.j. $[u]_K = (4, 4, 4, 3)^T$.

Příklad 6: Určete signaturu kvadratické formy g na $\mathbb{R}^3$, která má pro $u = (x, y, z)^T$ následující analytické vyjádření

a) $g(u) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$.

Signatura formy g je $(\#1, \#-1, \#0) = (1, 1, 1)$.

b) $g(u) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$.

Signatura formy g je $(\#1, \#-1, \#0) = (1, 0, 2)$.