Lineární algebra II - cvičení 12 $\qquad$ 12.5.2016

Příklad 1: Nalezněte matice $\mathbf{R}$ a $\mathbf{J}$ takové, že $\mathbf{A} = \mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární, matice $\mathbf{J}$ je v Jordanově normální formě a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2: Nalezněte ortonormální bázi vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
To je stejná úloha jako najít ortogonální matici $\mathbf{Q}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ takové, že $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$. Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 5$.

Jedna ortonormální báze vlastních vektorů je třeba $B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T; \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T; \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T\}$.

Příklad 3: Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy eliminace a derminantů. Pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní a její Choleského rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$ je dán maticí $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matice je pozitivně definitní a její Choleského rozklad je dán maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Matice není pozitivně definitní. Je jen pozitivně semidefinitní, a je rovna např. součinu $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ pro $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

(Těchto rozkladů dané matice lze nalézt více.)

Příklad 4: Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?

Matice $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $g > \sqrt{2}$.

Příklad 5: Spočtěte Choleského rozklad matice $\mathbf{A}$ a použijte ho k řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je $\mathbf{x} = (1, 1, -2, 0, 1)^T$.