Lineární algebra II - cvičení 10 28.4.2016

Příklad 1: Určete pomocí Cayley–Hamiltonovy věty A^5 a A^{-1}, kde:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^5 = \begin{pmatrix} 243 & 211 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^5 = \begin{pmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Příklad 2: Ve městě jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů, kteří volili Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch, kteří volili Bohaté, zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. Konečně 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Předpokládejte, že toto platí i při všech násleujících volbách. Jak pak bude vypadat limitní poměrové rozložení sil v místním zastupitelstvu?

Asketičtí obsadí 1/3 zastupitelstva, Bohatí 1/6 a Chudí 1/2.

Příklad 3: Rozložte následující matici na součin $\mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární a matice $\mathbf{J}$ je v Jordanově normální fromě.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 7 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Určete A^4 a A^5 pro matice A z předchozího příkladu.

a)

$A^4 = \begin{pmatrix} -48 & 32 & 0 \\ -128 & 80 & 0 \\ -64 & 32 & 16 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} -128 & 80 & 0 \\ -320 & 192 & 0 \\ -160 & 80 & 32 \end{pmatrix}$

b)

$A^4 = \begin{pmatrix} 19 & 42 & -96 \\ -2 & -9 & 16 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 31 & 75 & -165 \\ 0 & -4 & 5 \\ 5 & 10 & -24 \end{pmatrix}$

c)

$A^4 = \begin{pmatrix} -16 & -2 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ -32 & -17 & 48 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} -48 & -18 & 80 \\ 0 & 1 & 0 \\ -80 & -49 & 112 \end{pmatrix}$

Příklad 5: Rozložte následující matici na součin $\mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární a matice $\mathbf{J}$ je v Jordanově normální fromě.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -1/3 & 2 \end{pmatrix}$