

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ nad \mathbb{C}^n , resp. \mathbb{R}^n určete u následujících vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} :

1. skalární součin vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
2. euklidovské normy vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
3. vzdálenost vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
4. zdali jsou vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} navzájem kolmé.
 - a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.
 - b) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.
 - c) $\mathbf{x}^T = (1, 1 + i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)
 - d) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

Úloha 2: Nechť je skalární součin nad \mathbb{C}^3 dán předpisem:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + 2x_3 \overline{y_3} + x_3 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3}$$

Určete u následujících vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} :

1. skalární součin vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
2. euklidovské normy vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
3. vzdálenost vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}
4. zdali jsou vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} navzájem kolmé.
 - a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.
 - b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.
 - c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.
 - d) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

Úloha 3: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus).

Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý.

- a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.
- b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

Úloha 4: Mějme dva kolmé vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Dále nechť $\|\mathbf{u}\| = 12$, $\|\mathbf{v}\| = 5$. Určete $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Úloha 5: Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$.

Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?