

### Domácí písemka

Vyřešené příklady z této písemky můžete odevzdat na papíře na cvičení, nebo mailem na adresu jelinek@kam.mff.cuni.cz. Odevzdejte je nejpozději v pondělí 19. prosince.

1. Nechť  $K(s, r)$  označuje kladně orientovanou kružnici se středem v bodě  $s$  a poloměrem  $r$ . Spočítejte následující integrály.

1 (a)  $\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$  kde  $\gamma = K(i, 1)$ .

1 (b)  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$  kde  $\gamma = K(0, 1)$ .

1 (c)  $\int_{\gamma} \Re(z)\Im(z) dz$ , kde  $\gamma = K(0, 1)$ . ( $\Re(z)$  a  $\Im(z)$  označují reálnou a imaginární část  $z$ .)

2. Pro každou z následujících rovností najděte všechna komplexní čísla  $z$ , která ji splňují.

1 (a)  $z^5 = -1$ .

1 (b)  $e^z = \frac{i}{2}$ .

1 (c)  $\Re(\sin(z)) = 0$ .

- 2 3. Nechť  $a$  je reálné číslo větší než 1. Spočítejte (reálný) integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(x)} dx.$$

Návod: použijte vztah  $\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$  a ukažte, že hledaný integrál je roven komplexnímu integrálu  $\int_{\gamma} f$ , kde  $\gamma = K(0, 1)$  a  $f$  je vhodně zvolená komplexní funkce.

- 2 4. Spočítejte integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Návod: označme  $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ . Platí  $I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ . Spočítejte komplexní integrál  $\int_{\gamma} f$ , kde  $\gamma$  je sjednocení intervalu  $\gamma_1 = [-R, R]$  a půlkružnice  $\gamma_2 = \{R \exp(it); t \in [0, \pi]\}$  (zde můžete využít příklad 1a). Ukažte, že když se  $R$  blíží k  $+\infty$ , blíží se  $\int_{\gamma_2} f$  k nule, a odvoďte z toho hodnotu  $I$ .