

Obsah cvičení 19. prosince 2011

Spočítejte částečné součty řady $\sum_{n \geq 1} \sin(nx)$. Má tato řada pro pevné $x \in \mathbb{R}$ omezené částečné součty? Je možné omezit částečné součty konstantou nezávislou na x ?

Dokažte vzorec

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2 \sin(x/2)}.$$

Ukažte, že pro funkci $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ a číslo $N \in \mathbb{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní

- f je \mathbb{C} -lineární kombinace funkcí $\{\cos(kx), k = 0, \dots, N\}$ a $\{\sin(kx), k = 1, \dots, N\}$.
- f je \mathbb{C} -lineární kombinace funkcí $\{\exp(ikx), k = -N, \dots, N\}$
- f je \mathbb{C} -lineární kombinace funkcí $\{\cos(x)^k \sin(x)^\ell, k, \ell \geq 0, k + \ell \leq N\}$.

Spočítejte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, definované na intervalu $[-\pi, \pi]$.