

## První zápočtová písemka

- Nepoužívejte zápisky, skripta, ani jiné pomůcky. Pracujte samostatně.
  - Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Zadání si po písemce můžete nechat.
  - Pokud něčemu nerozumíte, zeptejte se cvičícího.
  - Pokud je u některého příkladu napsáno *netřeba zdůvodňovat*, znamená to, že stačí napsat pouze výsledek. V opačném případě je nutné kromě výsledku napsat také zdůvodnění.
  - Čísla v rámečku u levého okraje udávají maximální bodový zisk za každou otázku. Celkem můžete získat 36 bodů.
- 

- 4 1. Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je číslo  $2^{2n} - 1$  násobek tří.
2. Na množině  $\mathbb{Z}$  definujme relace  $R$  takto:  $(x, y) \in R$  právě když  $x + 3y$  je násobek čtyř (tj.  $x + 3y = 4k$  pro nějaké  $k \in \mathbb{Z}$ ).
- 8 (a) Dokažte, že  $R$  je ekvivalence.
- 4 (b) Popište třídy této ekvivalence (netřeba zdůvodňovat).
3. Nechť  $n$  je přirozené číslo. Kolik existuje uspořádaných trojic množin  $(M_1, M_2, M_3)$ ,
- 2 (a) ... pokud  $M_1, M_2$  a  $M_3$  jsou libovolné podmnožiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ ? (netřeba zdůvodňovat)
- 4 (b) ... pokud  $M_1, M_2$  a  $M_3$  jsou podmnožiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  splňující  $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$ ?
4. Ve fiktivní zemi existuje  $m$  různých ministerstev. Koalice složená z  $p$  politických stran se rozhodla sestavit vládu, přičemž každá politická strana z řad svých členů vybrala  $k$  kandidátů schopných zastávat libovolnou ministerskou funkci.
- 2 (a) Kolika různými způsoby je možné sestavit vládu, jestliže každé ministerské křeslo je nutné obsadit některým z navržených kandidátů, přičemž každý kandidát může zastávat nejvýše jednu ministerskou funkci? (netřeba zdůvodňovat)
- 7 (b) Jako bod (a), ale navíc požadujeme, aby každá koaliční strana měla ve vládě aspoň jednoho svého zástupce.
- 5 (c) Jako bod (a), ale navíc požadujeme, aby všechny koaliční strany měly ve vládě stejný počet zástupců (předpokládáme, že  $p$  dělí  $m$ ).