Bodované domácí úkoly — 5. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpoveď musíte zdůvodnit.

$\boxed{1}$ 1. Kolik existuje navzájem neizomorfních stromů, které mají pět listů a nemají žádný vrchol stupně dva?

$\boxed{2}$ 2. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na šesti vrcholech, jejichž všechny vrcholy mají stupeň tři?

3. Graf G, který je izomorfní svému doplňku $\overline{G}$ se nazývá *samodoplňkový*.

$\boxed{1}$ (a) Najděte všechny samodoplňkové kružnice (dokažte, že žádné jiné neexistují).

$\boxed{3}$ (b) Nechť G je samodoplňkový graf na n vrcholech. Dokažte, že buď n nebo $n-1$ je dělitelné čtyřmi. (Nápověda: kolik má samodoplňkový graf hran?)

$\boxed{3+3}$ (c) Najděte samodoplňkový graf na osmi vrcholech (3 body). Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje samodoplňkový graf na $4k$ vrcholech (další 3 body).

$\boxed{3+3}$ (d) Najděte samodoplňkový graf na devíti vrcholech (3 body). Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje samodoplňkový graf na $4k+1$ vrcholech (další 3 body).

$\boxed{4}$ 4. Existuje graf, který má právě dvě kostry?

$\boxed{2}$ 5. Najděte rovinný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň 5.

$\boxed{4}$ 6. Nechť G je rovinný graf, který má aspoň 11 vrcholů. Dokažte, že doplněk G není rovinný.

7. Rovinný graf se nazývá *triangulace*, pokud v některém jeho nakreslení je každá stěna ohraničena kružnicí délky tři.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte, že každý rovinný graf G s alespoň třemi vrcholy je podgrafem nějaké triangulace H, pro kterou platí $V(H) = V(G)$.

$\boxed{4}$ (b) Dokažte, že každý rovinný graf je indukovaným podgrafem nějaké triangulace.

8. V rovině je nakresleno n přímek, které dělí rovinu na oblasti. Nechť G je následující graf: vrcholy G jsou oblasti vymezené přímkami (včetně neomezených oblastí). Dvě oblasti jsou spojeny hranou G, pokud spolu sousedí, tj. pokud jejich hranice mají společný úsek kladné délky (dvě oblasti, které se dotýkají jen v jednom bodě nepokládáme za sousední).

$\boxed{2}$ (a) Dokažte, že G je bipartitní.

$\boxed{4}$ (b) Dokažte, že G je podgraf n-dimenzionální hyperkrychle H_n (byla definována na cvičení 2. prosince).

$\boxed{2}$ 9. Rovinný graf $G = (V, E)$ má 30 hran. Je dáno rovinné nakreslení grafu G, v němž každá stěna je trojúhelník, tj. každá stěna sousedí s právě třemi hranami. Kolik má G stěn? Kolik má vrcholů?