

Bodované domácí úkoly — 3. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpověď musíte zdůvodnit.

1. (a) Existuje souvislý graf, jehož doplněk je také souvislý?
1 (b) Existuje souvislý graf, jehož doplněk je nesouvislý?
4 (c) Existuje nesouvislý graf, jehož doplněk je také nesouvislý?
- 4 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf. Dokažte, že je možné každému vrcholu $v \in V$ přiřadit přirozené číslo $f(v) \in \mathbb{N}$ tak, aby platila ekvivalence

$$\{x, y\} \text{ je hrana } G \iff f(x) \text{ a } f(y) \text{ mají společného dělitele většího než } 1$$

- 2 3. Dokažte, že každý graf s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy stejného stupně.
- 5 4. Řekneme, že graf G je *sudý*, pokud všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň. Dokažte, že na množině vrcholů $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ existuje přesně $2^{\binom{n}{2}}$ sudých grafů. Nápověda: dokažte, že počet sudých grafů na vrcholech $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ je stejný jako počet všech grafů na vrcholech $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.