Bodované domácí úkoly — 2. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpoveď musíte zdůvodnit.

$\boxed{2}$ 1. Kolika způsoby lze na šachovnici velikosti $n \times n$ rozmístit k šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly? Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci.

2. Mravenec stojí v levém dolním rohu obdélníkové desky vysoké n milimetrů a široké m milimetrů. V každém kroku se mravenec přesune buď o jeden milimetr směrem vzhůru nebo o jeden milimetr směrem doprava, takže po $n + m$ krocích skončí v pravém horním rohu.

$\boxed{1}$ (a) Kolika různými způsoby může mravenec dojít do cíle?

$\boxed{2}$ (b) Kolika způsoby může mravenec dojít do cíle, jestliže mezi každými dvěma kroky doprava provede aspoň jeden krok vzhůru? (Výsledek vyjádřete v uzavřeném tvaru pomocí jednoho kombinačního čísla.)

$\boxed{4}$ (c) Kolika způsoby může mravenec dojít do cíle, jestliže nikdy neudělá více než tři kroky doprava v řadě po sobě? (Vyjádřete výsledek pomocí inkluze a exkluze.)

3. Kolik řešení má rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$, pokud

$\boxed{2}$ (a) $\forall i\colon\ x_i \in \mathbb{N}_0$, kde $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

$\boxed{2}$ (b) $\forall i\colon\ x_i \in \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\boxed{1}$ (c) $\forall i\colon\ x_i \in \mathbb{N}_0$, navíc $x_1 \geq 10$.

$\boxed{3}$ (d) $\forall i\colon\ x_i \in \{0, 1, \ldots, 400\}$ (použijte princip inkluze a exkluze).

V řešení záleží na pořadí sčítanců, tj. například 800+200+0+0 je jiné řešení než 0+800+0+200.

$\boxed{3}$ 4. V restauraci sedí u kulatého stolu n hostů. Každý z nich si chce objednat jedno ze tří nabízených jídel, a to tak, aby žádní dva jedlíci sedící vedle sebe neměli stejné jídlo. Kolika způsoby to mohou udělat?

$\boxed{3}$ 5. Kolik existuje grafů na n vrcholech, které neobsahují žádný vrchol stupně 0?