

Příklady z 9. 12. 2005

- Musí být souvislý graf na n vrcholech s $n - 1$ hranami nutně strom? Musí být graf bez kružnic na n vrcholech s $n - 1$ hranami nutně strom?
- Kolik hran má graf bez kružnic s n vrcholy a k komponentami souvislosti?
- Dokažte, že pro každý neprázdný strom T na množině vrcholů $\{v_1, \dots, v_n\}$ platí

$$\sum_{i=1}^n (2 - \deg_T(v_i)) = 2,$$

kde $\deg_T(v_i)$ označuje stupeň vrcholu v_i ve stromě T .

- Dokažte, že graf G je strom, právě když G obsahuje právě jednu kostru.
- Kolik koster má kružnice na n vrcholech? Kolik koster má graf tvořený dvěma kružnicemi spojenými hranou? Kolik koster má graf tvořený dvěma kružnicemi, které sdílí jeden společný vrchol? Kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{2,n}$?
- Funguje Kruskalův algoritmus pro hledání minimální kostry i v případě, že některé hrany mají záporná ohodnocení?
- Jak se změní minimální kostra ohodnoceného grafu, jestliže ke všem ohodnocením hran přičteme nějakou pevnou konstantu?
- Mějme graf, jehož hrany jsou ohodnocené kladnými reálnými čísly. Jak v tomto grafu najít kostru, která má co nejmenší součin ohodnocení hran?
- Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf s ohodnocením hran $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Dokažte, že pokud je ohodnocení w prostá funkce, pak G obsahuje právě jednu minimální kostru.
- Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, nechť $E' \subseteq E$ je nějaká podmnožina jeho hran. Dokažte, že G má kostru T obsahující všechny hrany E' , právě když graf $G' = (V, E')$ neobsahuje kružnici.
- Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, nechť $e \in E$ libovolná jeho hrana. Dokažte, že e je obsažena v každé kostře G , právě když $G' = (V, E \setminus \{e\})$ je nesouvislý.
- Dokažte, že 2-souvislý graf na n vrcholech má aspoň n různých koster.