Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

9. 7. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(10 bodů)* Zformulujte a dokažte větu o dvou policajtech pro posloupnosti.
2. *(10 bodů)* Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je shora omezená posloupnost reálných čísel. Pro libovolné $n \geq 0$ označme s_n supremum množiny $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \{a_k;\ k \geq n\}$. Dokažte, že posloupnost $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí, že má limitu v $\mathbb{R}^*$ a že tato limita je rovna $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
3. *(10 bodů)* Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
   - (i) Funkce $f(x)$ nemá (vlastní ani nevlastní) limitu pro $x \to +\infty$.
   - (ii) Posloupnost $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ nemá (vlastní ani nevlastní) limitu pro $n \to \infty$.
4. *(5 bodů)* Napište definici Taylorova polynomu řádu n funkce f se středem v bodě b.
5. *(5 bodů)* Pro přirozené číslo $k \geq 1$ definujme funkci $s_k(x)$ následovně: $s_1(x) = \sin x$ a pro $k \geq 2$ platí $s_k(x) = \sin(s_{k-1}(x))$. Spočítejte, v závislosti na parametru k, hodnotu
$$\lim_{x\to 0} \frac{s_k(x)}{x}.$$
   Zdá-li se vám to těžké, spočítejte tu limitu aspoň pro nějaká konkrétní k.
6. *(10 bodů)* Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která je konvexní na $\mathbb{R}$ a splňuje $f(0) < f(1)$. Dokažte, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
7. *(5 bodů)* Zformulujte větu o substituci pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte tu větu dokazovat. Znáte-li více verzí věty o substituci, zformulujte kteroukoliv z nich.
8. *(10 bodů)* Dokažte, že každá omezená monotónní funkce na kompaktním intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu riemannovsky integrovatelná.
9. *(15 bodů)* Pro parametr $p \in (0, 1)$ uvažme trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(p, 1)$. Označme $T(p)$ rotační těleso vzniklé otáčením tohoto trojúhelníku kolem osy x. Spočítejte objem a povrch tělesa $T(p)$.