

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

11. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

- (10 bodů) Zformulujte Heineho větu o ekvivalentní definici limity funkce. Tuto větu dokažte (stačí důkaz pro vlastní limitu v reálném bodě).
- (5 bodů) Mějme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou vzorcem $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Určete její limitu.
- (5 bodů) Definujte, kdy je množina $M \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní.
- (10 bodů) Najděte příklad spočetné nekonečné kompaktní množiny.
- (10 bodů) Zformulujte a dokažte Darbouxovu větu o nabývání mezihodnot.
- (10 bodů) Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce a necht' b je reálné číslo. Rozhodněte a zdůvodněte, zda některý z následujících dvou výroků implikuje ten druhý. O každé ze dvou možných implikací dokažte, že platí, nebo uveďte protipříklad.
 - Funkce f je spojitá v bodě b .
 - $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in U(b, \varepsilon): |f(x) - f(b)| < \alpha|x - b|$.
- (10 bodů) Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která je konvexní na \mathbb{R} . Dokažte, že obě limity $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existují (případně jako nevlastní), a navíc pokud f není konstantní, tak aspoň jedna z těchto limit je rovna $+\infty$.
- (5 bodů) Definujte horní a dolní Riemannovu sumu a horní a dolní Riemannův integrál.
- (15 bodů) Pro parametr $p \in (0, 1)$ uvažujme pravoúhlý trojúhelník s vrcholy bodech $(0, 0)$, $(p, 0)$ a $(0, 1 - p)$. Necht' K je prostorové těleso (kužel) vzniklé rotací tohoto trojúhelníku kolem osy x . Pro jakou hodnotu parametru p bude K mít největší objem a jak velký ten objem bude? (Pokud při řešení použijete znalosti, které se nedokazovaly na přednášce, musíte je odvodit z výsledků z přednášky.)