Příklady řešené na cvičení z KG2 20. 12.

Příklad 1. Nechť c_n označuje počet permutací na množině $[n] = \{1, \ldots, n\}$, které mají jen jeden cyklus. Najděte vzorec pro c_n a pro vytvořující funkci $C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$.

Příklad 2. Nechť $c_{k,n}$ je počet permutací $[n]$ majících právě k cyklů a nechť $p_n = n!$ je počet všech permutací $[n]$. Pomocí funkce $C(x)$ z předchozího příkladu vyjádřete vytvořující funkce $C_k(x) = \sum_{n\geq 0} c_{k,n} x^n/n!$ (pro pevné k) a $P(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n/n!$.

Příklad 3. Najděte vzorec pro vytvřující funkci $C(x, y) = \sum_{n,k\geq 0} c_{k,n} \frac{x^n}{n!} y^k$ a ukažte, jak pomocí něj lze spočítat průměrný počet cyklů v permutaci množiny $[n]$.

Příklad 4. Nechť B_n ("n-té Bellovo číslo") je počet ekvivalencí na množině $[n]$. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro vytvořující funkci $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.