

Sedmá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady pošlete mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 21. listopadu. Řešení dodejte nejpozději v úterý 27. listopadu.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

---

**Příklad 1.** Připomeňme, že chromatický polynom  $M(G, x)$  grafu  $G$  je funkce definovaná jako počet vrcholových obarvení grafu  $G$  pomocí barev  $\{1, 2, \dots, x\}$ . Jaký je vzorec pro chromatický polynom cesty na  $n$  vrcholech? [2 body]

**Příklad 2.** Symbolem  $H_d$  označme *hyperkrychli dimenze  $d$* , což je graf, jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti nul a jedniček délky  $d$ , přičemž dva vrcholy jsou v  $H_d$  spojeny hranou právě tehdy, když se příslušné posloupnosti liší jen v jedné souřadnici.

- (a) Pro která  $d$  je graf  $H_d$  eulerovský? [2 body]
- (b) Dokažte, že pro každé  $d \geq 2$  graf  $H_d$  obsahuje jako podgraf kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy. [4 body] *Poznámka: graf, který obsahuje kružnici procházející všemi jeho vrcholy, se nazývá 'hamiltonovský'.*

**Příklad 3.** Necht  $k$  je přirozené číslo větší než 1.

- (a) Dokažte, že libovolný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň  $k$ , obsahuje (jako podgraf) kružnici délky aspoň  $k + 1$ . [5 bodů]
- (b) Najděte graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň  $k$  a který neobsahuje žádnou kružnici délky větší než  $k + 1$ . [2 body]