

Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v úterý 14. listopadu.

Vrcholovou barevnost grafu G značím $\chi(G)$.

Příklad 1. Najděte graf, který obsahuje K_5 jako minor, ale neobsahuje dělení K_5 jako podgraf. [1 bod]

Příklad 2. Dokažte, že každý graf, který obsahuje K_5 jako minor, obsahuje dělení K_5 nebo dělení $K_{3,3}$ jako podgraf. [2 body] (*Poznámka: toto je poslední chybějící část z důkazu Kuratowského a Wagnerovy věty. Váš důkaz se tedy nemůže na tuto větu odvolávat.*)

Příklad 3. Dokažte, že úplný graf K_7 lze nakreslit na torus. [1 bod]

Příklad 4. Dokažte, že pro každou plochu Γ existuje jen konečně mnoho navzájem neizomorfních 7-regulárních grafů nakreslitelných na Γ . [2 body]

Příklad 5. Necht $G = (V, E)$ je graf. Předpokládejme, že hrany G lze zorientovat tak, že výsledná orientace $\vec{G} = (V, \vec{E})$ neobsahuje orientovanou cestu s k hranami. Dokažte, že $\chi(G) \leq k$. [3 body] (*Nápověda: ze cvičení už víme, jak postupovat v případě, že uvažovaná orientace je acyklická. Pro obecnou orientaci \vec{G} zkuste uvážit její co největší acyklický podgraf $\vec{G}' = (V, \vec{E}')$ a aplikovat na něj postup ze cvičení.*)

Příklad 6. Dokažte, že každý graf, jehož vrcholová barevnost je rovna k , má alespoň $\binom{k}{2}$ hran. [2 body]

Příklad 7. Necht $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech, a necht \bar{G} je doplněk grafu G , tj. $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Dokažte, že $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$. [2 body]