

Příklady ze cvičení z KGI

středa 2. 5.

1. Dokažte následující tvrzení:
 - (a) Každý nekonečný spočetný graf má nekonečně velkou kliku nebo nekonečně velkou nezávislou množinu.
 - (b) Každá nekonečná posloupnost reálných čísel obsahuje nekonečnou rostoucí podposloupnost, nekonečnou klesající podposloupnost nebo nekonečnou konstantní podposloupnost.
 - (c) Každá nekonečná spočetná množina bodů v rovině obsahuje nekonečnou podmnožinu bodů, které všechny leží na společné přímce, nebo nekonečnou podmnožinu bodů, z nichž žádné tři neleží na společné přímce.
2. Předpokládejme, že vrcholy úplného grafu K_N odpovídají číslům $\{1, 2, \dots, N\}$. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:
 - (a) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každé 2-obarvení hran K_N obsahuje jednobarevnou kopii K_k obsahující vrchol 1.
 - (b) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každé 2-obarvení hran K_N obsahuje jednobarevnou kopii K_k , jejíž vrcholy tvoří k -tici po sobě jdoucích čísel $\{i, i+1, \dots, i+k-1\}$.
 - (c) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každé 2-obarvení hran K_N obsahuje jednobarevnou kopii K_k , jejíž všechny vrcholy jsou mocniny dvou.
3. Uvažme tabulku s N řádky a N sloupci, jejíž políčka jsou obarvena b barvami. ‘Jednobarevná podtabulka’ je potom nějaká množina (ne nutně sousedních) řádků a sloupců na jejichž průsečících se vyskytují jen políčka jedné barvy. Dokažte následující tvrzení a snažte se získat co nejlepší horní odhad pro N v závislosti na b .
 - (a) Pro každé b existuje N takové, že každé b -obarvení tabulky $N \times N$ obsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru 1×10 .
 - (b) Pro každé b existuje N takové, že každé b -obarvení tabulky $N \times N$ obsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru 2×2 .
 - (c) Pro každé b existuje N takové, že každé b -obarvení tabulky $N \times N$ obsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru 10×10 .