

Příklady ze cvičení z KGI

středa 4. 4.

Označme $m(G)$ velikost největšího párování a $vc(G)$ velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v grafu G .

1. Najděte graf G , pro nějž platí $vc(G) > m(G) + 100$.
2. Dokažte, že pro každý graf G platí $vc(G) \leq 2m(G)$.
3. Nechť G je hypergraf, v němž každá hyperhrana obsahuje aspoň k vrcholů a každý vrchol je obsažen v nejvýše k hyperhranách. Dokažte, že G má systém různých reprezentantů.
4. Nechť M je čtvercová matice nezáporných reálných čísel, jejíž každý řádek i každý sloupec má součet 1. Dokažte, že lze v každém řádku M zvolit jedno nenulové číslo tak, že žádná dvě zvolená čísla nebudou ve stejném sloupci.
5. Dokažte následující "Hallovu větu s deficitem". Nechť G je bipartitní graf s partitami X a Y , nechť k je přirozené číslo. Potom G má párování velikosti aspoň $|X| - k$, právě když platí

$$\forall A \subseteq X: |A| \leq |N(A)| + k,$$

kde $N(A)$ označuje množinu vrcholů sousedících s aspoň jedním vrcholem z A .