Třetí série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 12. března.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. V tomto příkladu uvažujeme na vektorovým prostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ standardní skalární součin a jeho indukovanou normu. Nechť V je podprostor $\mathbb{R}^3$ definovaný následovně:

$$V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x_1 + x_2}{2} = x_3 \right\}.$$

a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V. [2 body]

b) Najděte matici P tvaru 3×3 takovou, že pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ platí, že Px je ortogonální projekce vektoru x na podprostor V. [2 body] (Poznámka: zde stačí jednotlivé složky matice P popsat číselným vzorečkem. Nemusíte trávit čas upravováním a zjednodušováním číselných výrazů. Neumíte-li najít vzorec pro P, tak aspoň dokažte, že matice P s požadovanými vlastnostmi existuje.)

c) Jaká je vzdálenost vektoru $x = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ od prostoru V? Který vektor prostoru V má k vektoru x nejblíž? [1 bod]

d) Najděte nenulový vektor $z \in \mathbb{R}^3$, který je kolmý na všechny vektory prostoru V. [1 bod]