

Domácí úkoly z diskrétní matematiky  
4. série

- Svě odpovědi nezapomeňte zdůvodnit.
- Řešení odevzdejte nejpozději ve středu 14. prosince.

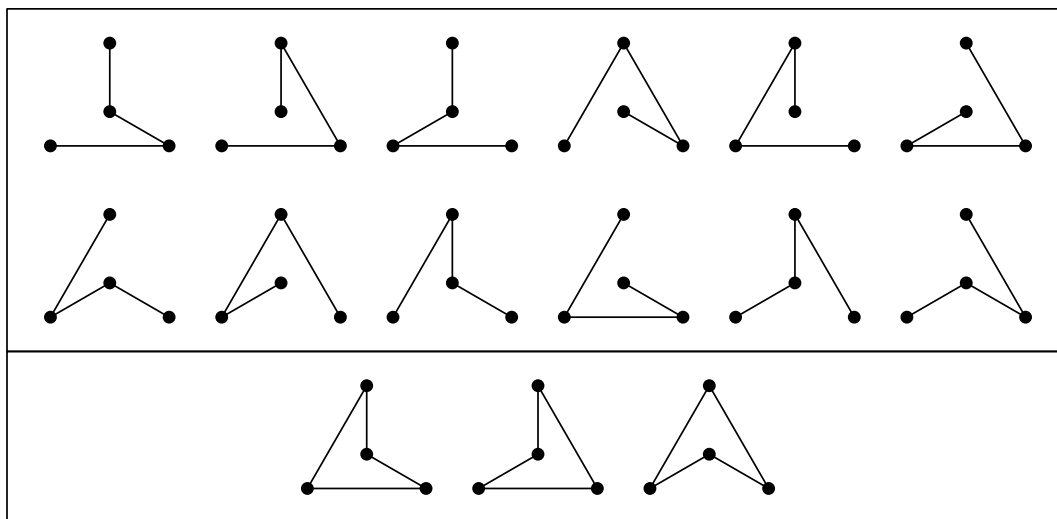
**Příklad 1.** Necht  $k \geq 2$  je přirozené číslo.

- Dokažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň  $k$ , obsahuje kružnici na aspoň  $k+1$  vrcholech. [2 body] (*Nápověda: pokud se vám nedaří najít dlouhou kružnici, zkuste aspoň najít co nejdelší cestu.*)
- Najděte graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň  $k$  a který neobsahuje kružnici na více než  $k+1$  vrcholech. [1 bod]

**Příklad 2.** Mějme danu množinu  $n$  vrcholů  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Kolik existuje na množině vrcholů  $V$  grafů, které jsou izomorfní grafu  $P_n$ , tj. cestě s  $n$  vrcholy? [2 body]
- Kolik existuje na množině vrcholů  $V$  grafů, které jsou izomorfní grafu  $C_n$ , tj. kružnici s  $n$  vrcholy? [2 body]

(*Například pro  $n = 4$  máme 12 grafů izomorfních  $P_4$  a 3 grafy izomorfní  $C_4$ , jak ukazuje následující obrázek.*)



**Příklad 3.** Dokažte, že na množině vrcholů  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , kde  $n \geq 1$ , existuje přesně  $2^{\binom{n-1}{2}}$  grafů, které mají všechny stupně sudé. [3 body] (*Nápověda: sestrojte bijekci, která libovolný graf na množině vrcholů  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  zobrazí na graf na množině vrcholů  $V$  mající všechny stupně sudé.*)