První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro páteční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději ve čtvrtek 5. listopadu.

Počet lichých komponent grafu G značím $\mathrm{odd}(G)$. *Izolovaný vrchol* v nějakém grafu je vrchol stupně 0.

Příklad 1. Nechť $m(G)$ označuje velikost největšího párování v grafu G. Řekneme, že párování M grafu $G = (V, E)$ je *maximální*, pokud pro každou nepárovací hranu $e \in E \setminus M$ platí, že $M \cup \{e\}$ není párování. Dokažte, že libovolné maximální párování libovolného grafu G má aspoň $m(G)/2$ hran [2 body]. Ukažte, že tento odhad je nejlepší možný, tj. najděte graf G s maximálním párováním M, které má velikost $m(G)/2$ [1 bod].

Příklad 2. Kolik perfektních párování má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ odebráním jedné hrany? [1 bod]

Příklad 3. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že G má perfektní párování, právě když pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že v grafu $G - S$ je nejvýš $|S|$ izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je graf s lichým počtem vrcholů. Řekneme, že párování M v grafu G je *skoro perfektní*, pokud M má jen jeden volný vrchol. Dokažte, že G má skoro perfektní párování, právě když pro každou množinu vrcholů $S \subseteq V$ platí, že $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + 1$. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body] (Nápověda: můžete třeba ukázat, že existence skoro perfektního párování v G je ekvivalentní existenci perfektního párování v nějakém jiném vhodně definovaném grafu G'.)

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární 2-souvislý graf a nechť $e \in E$ je libovolná jeho hrana. Dokažte, že graf G má perfektní párování, které neobsahuje hranu e [3 body].