Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

sedmá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 9. 4. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2}$ 1. Nechť M je matice čísel tvaru 10×10, obsahující čísla $\{1, \ldots, 10\}$, každé číslo se v matici vyskytuje právě desetkrát. Ukažte, že M má řádek nebo sloupec obsahující aspoň čtyři různá čísla.

$\boxed{2}$ 2. Turistický klub má 100 členů. Pro své členy klub zorganizoval 10 vlastivědných exkurzí. Každý člen klubu se mohl zúčastnit libovolného počtu exkurzí, ovšem na každé exkurzi bylo nejvýše 30 účastníků. Dokažte, že existují dva členové klubu, kteří nikdy nebyli na exkurzi společně, tj. na každé exkurzi byl nejvýše jeden z nich.

$\boxed{2}$ 3. Nechť G je rovinný graf, v jehož rovinném nakreslení jsou dvě stěny ohraničené kružnicí délky 3, dvě stěny ohraničené kružnicí délky 4, čtyři stěny ohraničené kružnicí délky 5 a jedna stěna ohraničená kružnicí délky 6. Jiné stěny v nakreslení G nejsou. Ukažte, že G má aspoň jeden vrchol stupně většího než 3. (Nápověda: když budete znát počet hran, tak z Eulerova vzorce zjistíte i počet vrcholů.)

Následující příklad je převzatý z předchozí série. Pokud už jste některou jeho část vyřešili v předchozí sérii, nemusíte ji samozřejmě řešit znovu.

$\boxed{2+1}$ 4. Mějme množinový systém $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Ze systému $\mathcal{S}$ můžeme odebrat nejvýše deset množin tak, aby zbývající množiny měly systém různých reprezentantů. (Formálně řečeno, $\exists \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \colon |\mathcal{S}'| \geq n - 10$ a $\mathcal{S}'$ má SRR.)
2. Systém $\mathcal{S}$ splní následující "Hallovu podmínku s deficitem":

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \colon \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \geq |I| - 10.$$

Za důkaz jedné implikace dostanete jeden bod, za důkaz obou tři body.