

Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

šestá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 2. 4. ve 14:00.

Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

3+1 1. Mějme množinový systém $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Ze systému \mathcal{S} můžeme odebrat nejvýše deset množin tak, aby zbývající množiny měly systém různých reprezentantů. (Formálně řečeno, $\exists S' \subseteq \mathcal{S}: |S'| \geq n - 10$ a S' má SRR.)
2. Systém \mathcal{S} splní následující "Hallovu podmínku s deficitem":

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}: \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \geq |I| - 10.$$

Za důkaz jedné implikace dostanete jeden bod, za důkaz obou čtyři body.

2 2. Nechť $[n]$ označuje množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ a nechť $\binom{[n]}{k}$ označuje systém všech k -prvkových podmnožin množiny $[n]$. Pro která přirozená čísla $k \leq n$ platí, že $\binom{[n]}{k}$ má systém různých reprezentantů?

2 3. Nechť $G = (V, E)$ je graf takový, že pro libovolný jeho podgraf $H = (V', E')$ platí, že $|E'| \leq 10|V'|$. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, aby do každého vrcholu G vstupovalo nejvýše 10 hran.