

Lineární algebra 1: Výpočetní úlohy ke zkoušce

Irena Penev

ZS 2025

Na zkoušce budete mít výpočetní a teoretické úlohy. Výpočetní úlohy budou tvořit přibližně 40 % bodů. Dostanete jednu nebo dvě „kratší“ úlohy a jednu „delší“ úlohu. Odkazy („section” nebo „example”) jsou na skripta (<https://iuuk.mff.cuni.cz/~ipenev/LALectureNotes.pdf>). Skripta jsou v angličtině, ale během semestru uvidíte alespoň jeden příklad každého typu na přednášce. Nicméně ve skriptech najdete více příkladů. Dostanete buď reálná čísla, nebo čísla v $\mathbb{Z}_2$ či $\mathbb{Z}_3$. Pokud bude potřeba upravovat větší matici, počítejte s tím, že čísla budou v $\mathbb{Z}_2$ nebo $\mathbb{Z}_3$. (V seznamu úloh $\mathbb{F}$ je $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ nebo $\mathbb{Z}_3$; v každé úloze na zkoušce bude jasně specifikováno.)

1 Kratší úlohy

1. Vyřešte soustavu lineárních rovnic a určete počet řešení.

* Examples 1.3.14–1.3.17

2. Vyřešte rovnici typu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a určete počet řešení.

* Examples 1.5.1–1.5.4

3. Vypočítejte součin dvou matic.

* Examples 1.7.3–1.7.4

4. Vypočítejte matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ vzhledem ke kanonickým bázím.

* Example 1.10.7

5. Pro lineární zobrazení f a g a jejich matice (vzhledem ke kanonickým bázím) vypočítejte matici (vzhledem ke kanonickým bázím) lineárního zobrazení $f \circ g$ a/nebo $g \circ f$.

* Example 1.10.14

6. Určete, zda je daná matice regulární, a pokud ano, najděte její inverzi.

* Example 1.11.5

7. Pro permutaci π určenou v „tabulkovém formátu”, tj. takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ - & - & \dots & - \end{pmatrix}$$

(kde místo „_” budete mít konkrétní čísla), určete:

- rozložení permutace π na cykly;

- rozložení π na složení transpozic;
- $\text{sgn}(\pi)$;
- π^{-1} , přičemž může být specifikováno, že je potřeba napsat π^{-1} v tabulkovém formátu a/nebo ve formátu rozložení na cykly.

* Example 2.3.1, Example 2.3.4, Sections 2.3.1–2.3.2

8. Pro permutace σ a π určete permutace $\sigma \circ \pi$ a $\pi \circ \sigma$ a určete jejich znaménka. (Permutace σ a π mohou být specifikovány v tabulkovém formátu nebo ve formátu rozložení na cykly. Od vás se může žádat, abyste napsali $\sigma \circ \pi$ a $\pi \circ \sigma$ v tabulkovém formátu a/nebo ve formátu rozložení na cykly.)

* Section 2.3.1

9. Pro matici A určete $\text{rank}(A)$ a určete báze následujících vektorových prostorů:

- řádkového prostoru $\text{Row}(A)$;
- sloupcového prostoru $\text{Col}(A)$;
- nulového prostoru (tj. jádra) $\text{Nul}(A)$ (alternativní značení: $\text{Ker}(A)$).

* Example 3.3.10, Example 3.3.27

10. Pro dané vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^n$ určete bázi $\mathcal{B}$ lineárního obalu $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ a rozšiřte $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{C}$ vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$.

* Example 3.3.24

11. Pro množinu vektorů $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ ve vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$,¹ určete:

- zda je množina $\mathcal{A}$ lineárně nezávislá;
- zda množina $\mathcal{A}$ generuje vektorový prostor V ;
- zda je $\mathcal{A}$ bází vektorového prostoru V .

* Examples 4.4.9–4.4.10

12. Pro vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{F}$, bázi $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ vektorového prostoru U , bázi $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ vektorového prostoru V , lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$,² určete:

- matici ${}_C[f]_B$;
- $\text{rank}(f)$ a $\dim(\text{Ker}(f))$;
- zda je f prosté;

¹ V bude buď prostor polynomů $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ nebo prostor matic $\mathbb{F}^{n \times m}$.

²Tady $f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)$ budou specifikovány pomocí $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$. Např. jestli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $m = 4$ a $n = 3$, můžete dostat něco takového:

- $f(\mathbf{b}_1) = 7\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_3$;
- $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_2$;
- $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$;
- $f(\mathbf{b}_4) = 3\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3$.

- zda je f na;
- zda je f isomorfismus.

* Examples 4.5.5–4.5.7

13. Pro dané báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ určete matici přechodu ${}_C \begin{bmatrix} \text{Id}_{\mathbb{F}^n} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.

* vzorec z Theorem 4.5.12

2 Delší úlohy

1. Pro dané vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in \mathbb{F}^n$ určete, které z vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ patří do $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Pro každé $i \in \{1, \dots, \ell\}$ t.ž. $\mathbf{b}_i \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, vyjádřete $\mathbf{b}_i$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ a rozhodněte, zda je toto vyjádření jednoznačné.

* Example 1.5.5–1.5.6

2. Vyřešte rovnici typu $AX = B$ nebo $XA = B$ a určete počet řešení.

* Section 1.9

3. Pro dané vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{F}^m$ a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{F}^n$ určete:

- zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ t.ž. $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_1, \dots, f(\mathbf{b}_k) = \mathbf{c}_k$, a pokud ano, je-li jediné;
- v případě, že takové f existuje a je jediné, určete vzorec pro f .

* Section 1.10.4

4. Pro vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{F}$,³ a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$:

- vypočítejte bázi $\mathcal{B}_U$ vektorového prostoru $U := \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$;
- rozšiřte $\mathcal{B}_U$ do báze $\mathcal{B}$ vektorového prostoru V ;
- pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ vypočítejte souřadnicový vektor $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.

* Examples 4.4.14–4.4.15

5. Pro vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{F}$ ⁴ a vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ určete, zda existuje lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž. $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}_k$, a pokud ano, určete počet takových lineárních zobrazení f . V případě, že takové f existuje a je jediné, určete dále:

- vzorec pro f ;
- $\text{rank}(f)$ a $\dim(\text{Ker}(f))$;
- zda je f prosté, na a/nebo isomorfismus;
- v případě, že f je isomorfismus, určete vzorec pro f^{-1} .

* Examples 4.5.21–4.5.24

³ V bude buď prostor polynomů $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ nebo prostor matic $\mathbb{F}^{n \times m}$.

⁴ U a V budou prostory polynomů nebo matic.