

Lineární algebra 1

Přednáška č.12

Isomorfismy mezi vektorovými prostory. Matice
lineárních zobrazení

Irena Penev

7.1.2026

- Tato přednáška má tři části:
 - 1 Isomorfismy mezi vektorovými prostory
 - 2 Matice lineárních zobrazení
 - 3 Ověřování existence a jednoznačnosti lineárních zobrazení se zadanými vlastnostmi: příklady s polynomy a maticemi

1 Isomorfismy mezi vektorovými prostory

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je *lineární* pokud splňuje následující axiomy:

- 1 $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U: f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2);$
- 2 $\forall \mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je *isomorfismus*, pokud je lineární a zároveň bijektivní. Existuje-li isomorfismus mezi U a V , pak říkáme, že U a V jsou *isomorfní*.

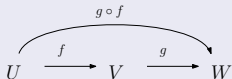
- Intuice: Isomorfismus je „přejmenování“ prvků prostoru.
 - Neformálně: vektor $\mathbf{u}$ se po „přejmenování“ isomorfismem $f : U \rightarrow V$ nazývá $f(\mathbf{u})$.
 - Jak uvidíme, isomorfismy zachovávají „strukturální“ vlastnosti vektorových prostorů (včetně dimenze).

- Připomenutí:

Tvrzení 21 z Přednášky č.10

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ pro všechna lineární zobrazení $f, g : U \rightarrow V$ je zobrazení $f + g$ lineární;^a
- Ⓑ pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a skaláry $\alpha \in \mathbb{F}$ je zobrazení $\alpha f : U \rightarrow V$ lineární;^b
- Ⓒ pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$ je zobrazení $g \circ f$ lineární.^c



^a $f + g : U \rightarrow V$ je definováno předpisem $(f + g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in U$.

^b $\alpha f : U \rightarrow V$ je definováno předpisem $(\alpha f)(\mathbf{u}) = \alpha(f(\mathbf{u})) \forall \mathbf{u} \in U$.

^c $g \circ f : U \rightarrow W$ je definováno předpisem $(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) \forall \mathbf{u} \in U$.

- Připomenutí:

Věta 8 z přednášky č.5

Nechť $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je isomorfismus (kde $\mathbb{F}$ je těleso). Pak je i $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ isomorfismem.

- Podobně (s velmi podobným důkazem) platí:

Tvrzení 1

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je isomorfismus. Pak je i $f^{-1} : V \rightarrow U$ isomorfismem.

- Pro formální důkaz viz skripta (Penev, Proposition 4.4.1).

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Řekneme, že U je *isomorfní* s V , což značíme $U \cong V$, pokud existuje isomorfismus $f : U \rightarrow V$.

Tvrzení 2

Nechť U , V a W jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak platí:

- (a) $U \cong U$;
- (b) $U \cong V \implies V \cong U$;
- (c) $(U \cong V \wedge V \cong W) \implies U \cong W$

Důkaz (nástin). (a) $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ je isomorfismus.

(b) Je-li $f : U \rightarrow V$ isomorfismus, pak je i $f^{-1} : V \rightarrow U$ isomorfismem.

(c) Jsou-li $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$ isomorfismy, pak je i $g \circ f : U \rightarrow W$ isomorfismem. $\square$

- Připomenutí:

Věta 14 z Přednášky č.11

Nechť U a V jsou vektorové prostory a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí:

- Ⓐ je-li f prosté, pak $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓑ je-li f na, pak $\dim(U) \geq \dim(V)$;
- Ⓒ je-li f izomorfismem, pak $\dim(U) = \dim(V)$.

- Tedy: $U \cong V \implies \dim(U) = \dim(V)$.
- Pro **konečnědimenzionální** vektorové prostory platí i obrácení **Věty 14(c)** z Přednášky č.11.

Věta 3

Pro libovolné **konečnědimenzionální** vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{F}$ platí: $U \cong V \iff \dim(U) = \dim(V)$.

- Abychom dokázali Větu 3 potřebujeme jednoduché tvrzení.

Věta 6 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

- Je-li $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, a platí-li pro vektor $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

pak nazýváme vektor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

souřadnicovým vektorem vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

Tvrzení 4

Nechť V je netriviální, konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Položme $n := \dim(V)$ a nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je libovolná báze prostoru V . Pak je $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ isomorfismem, a tedy $V \cong \mathbb{F}^n$.

- Důkaz je jednoduchý, viz skripta (Penev, Proposition 4.3.1).

Věta 3

Pro libovolné **konečnědimenzionální** vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{F}$ platí: $U \cong V \iff \dim(U) = \dim(V)$.

Důkaz. Implikace „ $\implies$ ” plyne z Věty 14(c) z Přednášky č.11.

Zbývá dokázat obrácenou implikaci („ $\impliedby$ ”). Předpokládejme, že platí $n := \dim(U) = \dim(V)$.

Jestliže $n = 0$, pak platí $U = \{\mathbf{0}_U\}$ a $V = \{\mathbf{0}_V\}$, a tedy $U \cong V$.

Předpokládejme nyní, že $n \geq 1$. Podle Tvrzení 4 platí, že $U \cong \mathbb{F}^n$ a $V \cong \mathbb{F}^n$. Nyní plyne z Tvrzení 2, že $U \cong V$. $\square$

Příklad

- a) Uved'te matici $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, pro kterou platí $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.
 - b) Uved'te matici $B \in \mathbb{Z}_2^{6 \times 4}$, pro kterou platí $\text{Row}(B) \cong \text{Nul}(B)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.
- **Poznámka:** Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ (kde $\mathbb{F}$ je těleso) platí:
 - 1 $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A) \iff \underbrace{\dim(\text{Col}(A))}_{=\text{rank}(A)} = \dim(\text{Nul}(A)),$
 - 2 $\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} m,$
- a podobně pro $\text{Row}(A)$, protože $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

Příklad

- Ⓐ Uvedte matici $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, pro kterou platí $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.
- Ⓑ Uvedte matici $B \in \mathbb{Z}_2^{6 \times 4}$, pro kterou platí $\text{Row}(B) \cong \text{Nul}(B)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.

Řešení. (a) Taková matice A **neexistuje**. Vskutku, předpokládejme pro spor, že pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ platí $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$. Pak platí

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Nul}(A)),$$

a zároveň platí

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} 5.$$

Plyne tedy, že

$$2\text{rank}(A) = 5,$$

a tedy $\text{rank}(A) = \frac{5}{2}$, což je spor, protože $\text{rank}(A)$ musí být celé číslo.

Příklad

- a) Uvedte matici $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, pro kterou platí $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.
- b) Uvedte matici $B \in \mathbb{Z}_2^{6 \times 4}$, pro kterou platí $\text{Row}(B) \cong \text{Nul}(B)$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.

Řešení (pokračování). (b) Uvažujme matici:

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

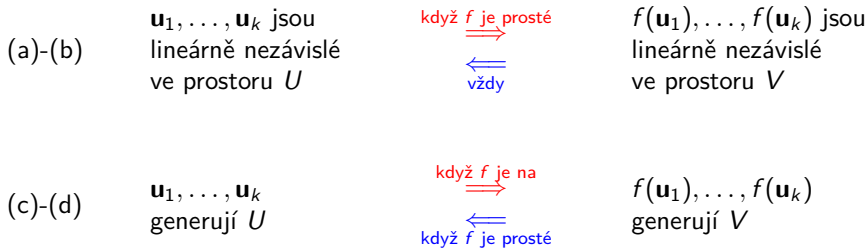
Pak platí $\dim(\text{Row}(B)) = \text{rank}(B) = 2$. Na druhou stranu platí

$$\text{rank}(B) + \dim(\text{Nul}(B)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} 4,$$

a tedy $\dim(\text{Nul}(B)) = 4 - \text{rank}(B) = 2$. Plyne tedy, že $\dim(\text{Row}(B)) = \dim(\text{Nul}(B)) = 2$, a tedy $\text{Row}(B) \cong \text{Nul}(B)$. $\square$

- Připomenutí:
- Schematická (a trochu neformální) formulace Věty 13 z Přednášky 14:

$$f : U \xrightarrow{\text{lineární}} V$$



- Je-li $f : U \rightarrow V$ isomorfismus, pak je f lineární, prosté a na, a tedy platí všechny implikace z diagramu výše.
- Z toho dostáváme Větu 5 (na následujícím slajdu).

Věta 5

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $f : U \rightarrow V$ je isomorfismus a nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé v $U \iff$ vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé v V ;
- Ⓑ vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ generují $U \iff$ vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují V ;
- Ⓒ $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je bází prostoru $U \iff \{f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)\}$ je bází prostoru V .

- Pripomenutí:

Tvrzení 4

Nechť V je netriviální, konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Položme $n := \dim(V)$ a necht' $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je libovolná báze prostoru V . Pak je $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ isomorfismem, a tedy $V \cong \mathbb{F}^n$.

- Poznámka: Pomocí $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ lze vektory z V přeložit do vektorů z $\mathbb{F}^n$.
- Už víme, jak lze zjistit, zda je konečná množina vektorů z $\mathbb{F}^n$:
 - lineárně nezávislá,
 - generující,
 - bází.
- Tím pádem dostáváme Tvrzení 6 (na následujícím slajdu).

Tvrzení 6

Nechť V je netriviální, konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je báze prostoru V . Necht' $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ ($m \geq 1$) jsou vektory z V a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položme $\mathbf{a}_i := [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}}$. Dále položme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak platí:

- Ⓐ vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé v $V \iff \text{rank}(A) = m$ (tj. A má plnou sloupcovou hodnotu);
- Ⓑ vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ generují $V \iff \text{rank}(A) = n$ (tj. A má plnou řádkovou hodnotu);
- Ⓒ $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ je bází prostoru $V \iff \text{rank}(A) = n = m$ (tj. A je čtvercová matice plné hodnoty).

- Pro formální důkaz viz skripta (Penev, Proposition 4.4.8).

Příklad

Uvažujme následující množinu polynomů (s reálnými koeficienty):

$$\mathcal{A} = \{x^2 + x, x^3 + 1, x, x^2 + 1\}$$

Rozhodněte, zda množina $\mathcal{A}$:

- a) je lineárně nezávislá v $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$;
- b) generuje $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$;
- c) je bází prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Řešení. Uvažujme bázi $\mathcal{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$ prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Položme:

- $\mathbf{a}_1 := [x^2 + x]_{\mathcal{P}} = [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_2 := [x^3 + 1]_{\mathcal{P}} = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$;
- $\mathbf{a}_3 := [x]_{\mathcal{P}} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_4 := [x^2 + 1]_{\mathcal{P}} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

Příklad

Uvažujme následující množinu polynomů (s reálnými koeficienty):

$$\mathcal{A} = \{x^2 + x, x^3 + 1, x, x^2 + 1\}$$

Rozhodněte, zda množina $\mathcal{A}$:

- a) je lineárně nezávislá v $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$;
- b) generuje $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$;
- c) je bází prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Řešení (pokračování). Dále položme

$$A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme $\text{RREF}(A) = I_4$, a tedy $\text{rank}(A) = 4$. Vidíme, že A je čtvercová matice plné hodnosti.

Plyne, že $\mathcal{A}$ je bází prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, z čehož podle definice vyplývá, že $\mathcal{A}$ je lineárně nezávislá množina generující prostor $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. $\square$

Příklad

Uvažujme následující matice z prostoru $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najděte bázi $\mathcal{B}_U$ podprostoru $U := \text{Span}(M_1, M_2, M_3, M_4)$ a rozšiřte ji na bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$. Pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ t.ž. $M_i \notin \mathcal{B}$ vyjádřete M_i jako lineární kombinaci vektorů z $\mathcal{B}$ a poté vypočítejte souřadnicový vektor $[M_i]_{\mathcal{B}}$.

- **Poznámka:** Příklady tohoto druhu jsme už viděli, ale pouze s vektory z $\mathbb{F}^n$.
 - Nyní použijeme souřadnicové vektory, abychom „přeložili“ matice z $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$ do vektorů z $\mathbb{Z}_3^4$ (a zpátky).

Příklad

Uvažujme následující matice z prostoru $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najděte bázi $\mathcal{B}_U$ podprostoru $U := \text{Span}(M_1, M_2, M_3, M_4)$ a rozšiřte ji na bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$. Pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ t.ž. $M_i \notin \mathcal{B}$ vyjádřete M_i jako lineární kombinaci vektorů z $\mathcal{B}$ a poté vypočítejte souřadnicový vektor $[M_i]_{\mathcal{B}}$.

Řešení. Položme

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Víme, že

$$\mathcal{A} := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

je bází $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$. Označme V obraz podprostoru U při isomorfismu $[\cdot]_{\mathcal{A}}$.

Řešení (pokračování). Dále uvažujme (kanonickou) bázi

$$\mathcal{E}_4 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = \left\{ [A_1]_{\mathcal{A}}, [A_2]_{\mathcal{A}}, [A_3]_{\mathcal{A}}, [A_4]_{\mathcal{A}} \right\}$$

prostoru $\mathbb{Z}_3^4$. Nyní sestojíme matici C typu 4×8 , jejíž sloupce jsou souřadnicové vektory matic

$$M_1, M_2, M_3, M_4, A_1, A_2, A_3, A_4$$

vzhledem k bázi $\mathcal{A}$, neboli

$$C := \left[[M_1]_{\mathcal{A}} \quad [M_2]_{\mathcal{A}} \quad [M_3]_{\mathcal{A}} \quad [M_4]_{\mathcal{A}} \mid [A_1]_{\mathcal{A}} \quad [A_2]_{\mathcal{A}} \quad [A_3]_{\mathcal{A}} \quad [A_4]_{\mathcal{A}} \right].$$

Tedy

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}(C) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

kde jsme obarvilibázické sloupce.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$C := \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} \textcolor{red}{M_1} & & & & & & & & \\ \textcolor{red}{M_2} & & & & & & & & \\ \textcolor{red}{M_3} & & & & & & & & \\ \textcolor{red}{M_4} & & & & & & & & \\ \hline & & & & \textcolor{blue}{A_1} & & & & \\ & & & & & \textcolor{blue}{A_2} & & & \\ & & & & & & \textcolor{blue}{A_3} & & \\ & & & & & & & \textcolor{blue}{A_4} & \end{array} \right].$$

$$\text{RREF}(C) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \textcolor{red}{1} & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \textcolor{red}{0} & 0 & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Tedy je

$$\left\{ \textcolor{red}{[M_1]_{\mathcal{A}}}, \textcolor{red}{[M_3]_{\mathcal{A}}} \right\}$$

bází V , zatímco je

$$\left\{ \textcolor{red}{[M_1]_{\mathcal{A}}}, \textcolor{red}{[M_3]_{\mathcal{A}}}, \textcolor{blue}{[A_2]_{\mathcal{A}}}, \textcolor{blue}{[A_3]_{\mathcal{A}}} \right\}$$

bází $\mathbb{Z}_3^4$, která rozšiřuje bázi podprostoru V . Jelikož je $[\cdot]_{\mathcal{A}}$ isomorfismus, vidíme, že

$$\mathcal{B}_U := \{\textcolor{red}{M_1}, \textcolor{red}{M_3}\}$$

je bází U , zatímco

$$\mathcal{B} := \{\textcolor{red}{M_1}, \textcolor{red}{M_3}, \textcolor{blue}{A_2}, \textcolor{blue}{A_3}\}$$

je bází $\mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$, která rozšiřuje bázi $\mathcal{B}_U$ podprostoru U .

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$C := \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} M_4 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} A_3 \end{bmatrix}_A & \begin{bmatrix} A_4 \end{bmatrix}_A \end{array} \right].$$

$$\text{RREF}(C) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Z $\text{RREF}(C)$ lze vyčíst:

- $M_2 = 2M_1$,
- $M_4 = 2M_1 + M_3$.

Na konci lze vyčíst souřadnicové vektory:

- $\begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
- $\begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
- $\begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
- $\begin{bmatrix} M_4 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.



- Pro další podobné příklady viz skripta (Penev, oddíl 4.4.3).

2 Matice lineárních zobrazení

- V této části přednášky kvůli omezenému času vynecháme skoro všechny důkazy.
 - Důkazy naleznete ve skriptech (Penev, oddíl 4.5 - nepovinná četba).
- Soustředíme se na nejdůležitější definice, věty a příklady.

- Připomenutí:

Věta 5 z Přednášky č.4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{F}^n$ a položme $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z $\mathbb{F}^m$. Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Nyní tuto Větu zobecníme!

Věta 7

Nechť U a V jsou netriviální, konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ je báze prostoru U , nechť $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ je báze prostoru V a nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak existuje právě jedna matice z $\mathbb{F}^{n \times m}$, kterou značíme ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ a nazýváme ji *maticí zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$* , taková, že pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{C}}.$$

Navíc je matice ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ dána předpisem

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [f(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

- Důkaz: vynechán. Viz skripta (Penev, Theorem 4.5.1).

- Připomenutí:

Věta 1 z Přednášky č.11

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ je libovolná báze prostoru U a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.^a Pak existuje jediné lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž.

$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$. Navíc je-li U netriviální (tj. $n \neq 0$), pak je f určeno následujícím předpisem: pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$$f(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \text{kde } [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n]^T.$$

Na druhou stranu, je-li U triviální (tj. $U = \{\mathbf{0}\}$, a tedy $n = 0$ a $\mathcal{B} = \emptyset$), pak je zobrazení $f : U \rightarrow V$ určeno předpisem $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

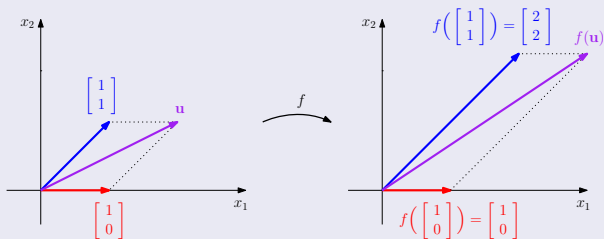
^aZde jsou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ libovolné vektory z V .

Příklad

Uvažujme bázi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a (jediné) lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňuje:

- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vypočítejte matici ${}_B[f]_B$.



Příklad

Uvažujme bázi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a (jediné) lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňuje:

- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$
- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Vypočítejte matici ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$.

Řešení. Podle vzorce z Věty 7 platí:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} \left[f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \right]_{\mathcal{B}} & \left[f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Věta 7

Nechť U a V jsou netriviální, konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ je báze prostoru U , nechť $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ je báze prostoru V a nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak existuje právě jedna matice z $\mathbb{F}^{n \times m}$, kterou značíme ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ a nazýváme ji *maticí zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$* , taková, že pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{C}}.$$

Navíc je matice ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ dána předpisem

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} = [[f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [f(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}}].$$

- **Poznámka:** Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathcal{E}_m$ a $\mathcal{E}_n$ jsou kanonické báze prostorů $\mathbb{F}^m$ a $\mathbb{F}^n$ respektivě.

- Pak je ${}_{\mathcal{E}_n}[f]_{\mathcal{E}_m}$ maticí lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím. Vskutku, pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^m$ platí:

$${}_{\mathcal{E}_n}[f]_{\mathcal{E}_m} \mathbf{u} = {}_{\mathcal{E}_n}[f]_{\mathcal{E}_m} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}_m} = [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{E}_n} = f(\mathbf{u}).$$

Věta 8

Nechť U , V a W jsou netriviální, konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ je báze prostoru U , nechť $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ je báze prostoru V a nechť $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_p\}$ je báze prostoru W . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ pro všechna lineární zobrazení $f, g : U \rightarrow V$ je zobrazení $f + g$ lineární,^a a navíc platí

$${}_C[f + g]_{\mathcal{B}} = {}_C[f]_{\mathcal{B}} + {}_C[g]_{\mathcal{B}};$$

- Ⓑ pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a všechna skalární čísla $\alpha \in \mathbb{F}$ je zobrazení αf lineární,^b a navíc platí

$${}_C[\alpha f]_{\mathcal{B}} = \alpha {}_C[f]_{\mathcal{B}};$$

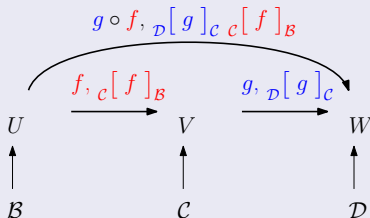
^aJako obvykle je zobrazení $f + g : U \rightarrow V$ definováno vztahem $(f + g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$ pro všechna $\mathbf{u} \in U$.

^bJako obvykle je zobrazení $\alpha f : U \rightarrow V$ definováno vztahem $(\alpha f)(\mathbf{u}) = \alpha(f(\mathbf{u}))$ pro všechna $\mathbf{u} \in U$.

Věta 8 (pokračování)

- pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$ je zobrazení $g \circ f$ lineární,^a a navíc platí

$${}_D[g \circ f]_B = {}_D[g]_C {}_C[f]_B.$$



^aJako obvykle je zobrazení $g \circ f : U \rightarrow W$ definováno vztahem $(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u}))$ pro všechna $\mathbf{u} \in U$.

- Důkaz: vynechán. Viz skripta (Penev, Theorem 4.5.3).

Věta 9

Nechť U a V jsou netriviální, konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ je báze prostoru U a nechť $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ je báze prostoru V . Nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení.^a Pak platí:

- a) $\text{rank}(f) = \text{rank}\left({}_C[f]_{\mathcal{B}}\right)$;
- b) $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim\left(\text{Nul}\left({}_C[f]_{\mathcal{B}}\right)\right)$;
- c) f je prosté $\iff \text{Nul}\left({}_C[f]_{\mathcal{B}}\right) = \{\mathbf{0}\}$;
- d) f je prosté $\iff \text{rank}\left({}_C[f]_{\mathcal{B}}\right) = m$ (tj. matice ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ má plnou sloupcovou hodnotu);
- e) f je na $\iff \text{rank}\left({}_C[f]_{\mathcal{B}}\right) = n$ (tj. matice ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ má plnou řádkovou hodnotu);

^aTedy platí $\dim(U) = m$, $\dim(V) = n$ a ${}_C[f]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{F}^{n \times m}$.

Věta 9 (pokračování)

- ① f je isomorfismus $\iff$ matice ${}_C[f]_B$ je regulární (a zejména čtvercová);
- ② je-li f isomorfismus, pak ${}_B[f^{-1}]_C = \left({}_C[f]_B\right)^{-1}$.

- Důkaz: vynechán. Viz skriptá (Penev, Theorem 4.5.4).

Příklad

Nechť U a V jsou reálné vektorové prostory. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ je báze prostoru U a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ je báze prostoru V . Nechť $f : U \rightarrow V$ je (jediné) lineární zobrazení, které splňuje:

- $f(\mathbf{b}_1) = -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3$;
- $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3$;
- $f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3$.

(Existence a jedinečnost lineárního zobrazení f plynou z Věty 1 z Přednášky č.11.)

- Vypočítejte matici ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$.
- Vypočítejte $\text{rank}(f)$ a $\dim(\text{Ker}(f))$.
- Je zobrazení f prosté? Je f na? Je f isomorfismus?

Řešení. Podle Věty 7 platí:

$$\begin{aligned} {}_C[f]_B &= \begin{bmatrix} [f(\mathbf{b}_1)]_C & [f(\mathbf{b}_2)]_C & [f(\mathbf{b}_3)]_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [-2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3]_C & [\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3]_C & [\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3]_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme $\text{RREF}({}_C[f]_B) = I_3$, a tedy $\text{rank}({}_C[f]_B) = 3$.

Z Věty 9 nyní vyplývá, že $\text{rank}(f) = \text{rank}({}_C[f]_B) = 3$, a tedy $\dim(\text{Ker}(f)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} \dim(U) - \text{rank}(f) = 3 - 3 = 0$.

Z Věty 9 dále plyne, že f je prosté, na i isomorfismus. $\square$

- Připomenutí:

Věta 7

Nechť U a V jsou netriviální, konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ je báze prostoru U , nechť $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ je báze prostoru V a nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak existuje právě jedna matice z $\mathbb{F}^{n \times m}$, kterou značíme ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ a nazýváme ji *maticí zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$* , taková, že pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{C}}.$$

Navíc je matice ${}_C[f]_{\mathcal{B}}$ dána předpisem

$${}_C[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [f(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

Definice

Nechť $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou báze netriviálního, konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak matici ${}_C[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}$ nazýváme *maticí přechodu mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$* .

Tvrzení 10

Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ jsou báze netriviálního, konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak matice přechodu ${}_c[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}$ splňuje

$${}_c[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Navíc je tato matice dána předpisem

$${}_c[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

Důkaz. Podle definice platí pro každé $\mathbf{v} \in V$:

$${}_c[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\text{Id}_V(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} {}_c[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}} &\stackrel{\text{Věta 7}}{=} \begin{bmatrix} [\text{Id}_V(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [\text{Id}_V(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Tvrzení 11

Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ jsou báze netriviálního, konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak jsou matice přechodu ${}_C[\text{Id}_V]_B$ a ${}_B[\text{Id}_V]_C$ regulární, a navíc jsou si navzájem inverzní.

Důkaz. Jelikož je $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ isomorfismem, vyplývá z Věty 9(f), že jsou matice ${}_C[\text{Id}_V]_B$ a ${}_B[\text{Id}_V]_C$ regulární.

Navíc platí

$${}_C[\text{Id}_V]_B = {}_C[\text{Id}_V^{-1}]_B \stackrel{\text{Věta 9(g)}}{=} \left({}_B[\text{Id}_V]_C\right)^{-1}.$$



- Následující lemma a věta dávají vzorec pro speciální případ matic přechodu mezi bázemi prostoru $\mathbb{F}^n$ (kde $\mathbb{F}$ je těleso):

Lemma 12

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Nechť $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je kanonická a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ libovolná báze prostoru $\mathbb{F}^n$. Položme $B := [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Pak je B regulární, a navíc platí

$${}_{\mathcal{E}_n} [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}} = B \quad \text{a} \quad {}_{\mathcal{B}} [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{E}_n} = B^{-1}.$$

- Důkaz: vynechán. Viz skripta (Penev, Lemma 4.5.11).

Lemma 12

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Nechť $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je kanonická a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ libovolná báze prostoru $\mathbb{F}^n$. Položme $B := [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Pak je B regulární, a navíc platí

$${}_{\mathcal{E}_n} [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}} = B \quad \text{a} \quad {}_{\mathcal{B}} [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{E}_n} = B^{-1}.$$

Věta 13

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ jsou báze prostoru $\mathbb{F}^n$. Položme $B := [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ a $C := [\mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_n]$. Pak je matice ${}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B$ regulární a je dána předpisem

$${}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B = C^{-1}B.$$

Důkaz. $\text{Id}_{\mathbb{F}^n}$ je isomorfismus, a tedy je matice ${}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B$ regulární (podle Věty 9(g)).

Navíc platí ${}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B = {}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n} \circ \text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B =$
 ${}_C [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{E}_n} {}_{\mathcal{E}_n} [\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B \stackrel{\text{Lemma 12}}{=} C^{-1}B. \quad \square$

Věta 13

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ jsou báze prostoru $\mathbb{F}^n$. Položme $B := \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ a $C := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$. Pak je matice ${}_C[\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B$ regulární a je dána předpisem

$${}_C[\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B = C^{-1}B.$$

Příklad

Uvažujme báze $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ a $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^2$. Položme $B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a $C := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Pak platí

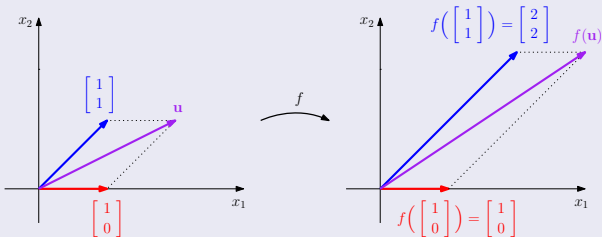
$${}_C[\text{Id}_{\mathbb{F}^n}]_B = C^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Příklad

Uvažujme bázi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a (jediné) lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňuje:

- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vypočítejte matici lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím. $_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$.



Řešení. V jednom z předchozích příkladu jsme už vypočítali matici

$${}_B[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Položme $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pak platí $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Nyní spočítáme matici lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím:

$${}_{\mathcal{E}_2}[f]_{\mathcal{E}_2} = {}_{\mathcal{E}_2}[\text{Id}_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ \text{Id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}$$

$$\stackrel{\text{Věta 8(c)}}{=} {}_{\mathcal{E}_2}[\text{Id}_{\mathbb{R}^2}]_B {}_B[f]_B {}_B[\text{Id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}$$

$$\stackrel{\text{Lemma 12}}{=} B {}_B[f]_B B^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

- 3 Ověřování existence a jednoznačnosti lineárních zobrazení se zadanými vlastnostmi: příklady s polynomy a maticemi

Příklad

Uvažujme následující matice s prvky z $\mathbb{Z}_2$:

• $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

• $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

• $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

• $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

• $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

• $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

• $M_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

• $M_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Dále uvažujme následující polynomy s koeficienty z $\mathbb{Z}_2$:

• $p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$

• $p_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1;$

• $p_3(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1;$

• $p_4(x) = x^3;$

• $p_5(x) = x^5 + x^2 + 1;$

• $p_6(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x;$

• $p_7(x) = x^2 + x;$

• $p_8(x) = x^5 + x.$

Příklad (pokračování)

- a) Dokažte, že existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_2^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^5$, které splňuje $f(M_i) = p_i(x) \forall i \in \{1, \dots, 8\}$.
- b) Vypočítejte $\text{rank}(f)$ a $\dim(\text{Ker}(f))$.
- c) Je f prosté? Je f na? Je f isomorfismus?
- d) Nalezněte vzorec pro f , tj. doplňte chybějící výraz:

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}\right) = \underline{\hspace{10em}} \\ \forall a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} \in \mathbb{Z}_2.$$

- e) Je-li f isomorfismem, nalezněte vzorec pro f^{-1} , tj. doplňte chybějící výraz:

$$f^{-1}\left(a_5x^5 + \dots + a_1x + a_0\right) = \underline{\hspace{10em}} \\ \forall a_0, a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{Z}_2.$$

Řešení. V našem řešení budeme používat bázi

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

prostoru $\mathbb{Z}_2^{2 \times 3}$ a bázi $\mathcal{P} := \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^5$.

Příklad

- Ⓐ Dokažte, že existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_2^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^5$, které splňuje $f(M_i) = p_i(x) \forall i \in \{1, \dots, 8\}$.

Řešení (pokračování). (a) Budeme řešit matici ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$.

Požadujeme, aby lineární zobrazení f splňovalo $f(M_i) = p_i(x)$ pro všechna $i \in \{1, \dots, 8\}$, a tedy aby (neznámá) matice ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$ splňovala

$${}_P[f]_{\mathcal{M}} [M_i]_{\mathcal{M}} = [p_i(x)]_P$$

pro všechna $i \in \{1, \dots, 8\}$.

To je ekvivalentní rovnosti

$${}_P[f]_{\mathcal{M}} \underbrace{[[M_1]_{\mathcal{M}} \ \dots \ [M_8]_{\mathcal{M}}]}_{=:M} = \underbrace{[[p_1(x)]_P \ \dots \ [p_8(x)]_P]}_{=:P}.$$

Matice M a P zde lze snadno vypočítat, zatímco matice ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$ je neznámá, kterou potřebujeme určit.

Řešení (pokračování). Připomenutí: Potřebujeme vyřešit rovnici

$${}_P[f]_{\mathcal{M}} \underbrace{[[M_1]_{\mathcal{M}} \ \dots \ [M_8]_{\mathcal{M}}]}_{=:M} = \underbrace{[[p_1(x)]_P \ \dots \ [p_8(x)]_P]}_{=:P}.$$

pro ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$.

Nejprve transponujeme obě strany rovnice, čímž dostáváme

$$M^T \left({}_P[f]_{\mathcal{M}} \right)^T = P^T,$$

což vyřešíme pro $\left({}_P[f]_{\mathcal{M}} \right)^T$.

Řešení (pokračování). Uvažujme matici

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} M^T \\ P^T \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} M_1 \\ \vdots \\ M_8 \end{array} \right]_{\mathcal{M}}^T & \left[\begin{array}{c} p_1(x) \\ \vdots \\ p_8(x) \end{array} \right]_{\mathcal{P}}^T \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

kterou pak upravíme Gaussovou-Jordanovou eliminací (viz následující slajd).

Řešení (pokračování).

$$\text{RREF}\left(\begin{bmatrix} M^T & P^T \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nyní vyčteme (jediné) řešení rovnice vzhledem k $\left({}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}\right)^T$:

$$\left({}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}\right)^T = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Řešení (pokračování). Transpozicí dostáváme (jediné) řešení vzhledem k ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$:

$${}_P[f]_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z existence a jedinečnosti matice ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$ plynou existence a jedinečnost lineárního zobrazení $f: \mathbb{Z}_2^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^5$, které splňuje $f(M_i) = p_i(x) \forall i \in \{1, \dots, 8\}$.

Řešení (pokračování).

- **Poznámka:** V tomto příkladu jsme ukázali existenci a jedinečnost matice ${}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}$, což implikovalo existenci a jedinečnost lineárního zobrazení f se specifikacemi uvedenými ve znění příkladu.
 - Pokud bychom pro matici ${}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}$ získali více než jedno řešení, znamenalo by to, že lineární zobrazení f s danými specifikacemi existuje, ale není jediné.
 - Naopak, pokud by pro matici ${}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}$ neexistovalo žádné řešení, znamenalo by to, že lineární zobrazení f s danými specifikacemi neexistuje.

Příklad

(b) Vypočítejte $\text{rank}(f)$ a $\dim(\text{Ker}(f))$.

Řešení (pokračování). (b) Gaussovou-Jordanovou eliminací spočítáme

$$\text{RREF}(\mathcal{P}[f]_{\mathcal{M}}) = I_6.$$

Tedy

$$\text{rank}(f) \stackrel{\text{věta 9(a)}}{=} \text{rank}(\mathcal{P}[f]_{\mathcal{M}}) = 6.$$

Na druhou stranu platí

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) \stackrel{\text{rank-nullity}}{=} \dim(\mathbb{Z}_2^{2 \times 3}),$$

a tedy

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{Z}_2^{2 \times 3}) - \text{rank}(f) = 6 - 6 = 0.$$

Příklad

☉ Je f prosté? Je f na? Je f isomorfismus?

Řešení (pokračování). (c) Jelikož $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, plyne z Věty 9(c), že f je prosté.

Jelikož $\text{rank}(f) = 6 = \dim(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^5)$, plyne z Tvzení 7 z Přednášky č.11, že f je na.

Lineární zobrazení f je isomorfismus, protože je prosté a na.

- Alternativně, jelikož definiční obor i obor hodnot lineárního zobrazení f mají stejnou konečnou dimenzi a jelikož je f prosté, plyne z Důsledku 12 z Přednášky č.11, že f je také na a isomorfismus.

Příklad

(d) Nalezněte vzorec pro f , tj. doplňte chybějící výraz:

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}\right) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$\forall a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} \in \mathbb{Z}_2.$

Řešení (pokračování). (d) Pomocí matice ${}_P[f]_{\mathcal{M}}$ jednoduše nalezněme vzorec pro f (viz následující sladě).

Řešení (pokračování). Pro $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} \in \mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned}
 \left[f \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathcal{P}} &= {}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}} \left[\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{M}} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} + a_{2,3} \\ a_{2,1} + a_{2,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,1} + a_{2,1} \\ a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,3} \end{bmatrix} \\
 &= \left[\begin{pmatrix} (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,3})x^5 + \\ + (a_{1,1} + a_{2,1})x^4 + a_{1,3}x^3 + \\ + (a_{2,1} + a_{2,2})x^2 + \\ + (a_{2,2} + a_{2,3})x + a_{2,1} \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{P}}
 \end{aligned}$$

Řešení (pokračování). Jelikož $[\cdot]_{\mathcal{P}}$ je isomorfismus (a zejména je f prosté), plyne, že

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,3})x^5 + \\ +(a_{1,1} + a_{2,1})x^4 + a_{1,3}x^3 + \\ +(a_{2,1} + a_{2,2})x^2 + \\ +(a_{2,2} + a_{2,3})x + a_{2,1} \end{cases}$$

pro všechna $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} \in \mathbb{Z}_2$.

Příklad

- ⓔ Je-li f isomorfismem, nalezněte vzorec pro f^{-1} , tj. doplňte chybějící výraz:

$$f^{-1}\left(a_5x^5 + \cdots + a_1x + a_0\right) = \frac{\quad}{\quad} \\ \forall a_0, a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{Z}_2.$$

Řešení (pokračování). (e) Jak jsme už viděli v části (c), f je skutečně isomorfismus. Nalezněme vzorec pro f^{-1} . Nejdřív spočítáme

$${}_{\mathcal{M}}[f^{-1}]_{\mathcal{P}} \stackrel{\text{Věta 9(g)}}{=} \left({}_{\mathcal{P}}[f]_{\mathcal{M}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní pokračujeme podobně jako v části (d).

Řešení (pokračování). Pro všechna $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z}_2$ platí:

$$\begin{aligned}
 & \left[f^{-1} \left(a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right) \right]_{\mathcal{M}} \\
 = & \mathcal{M} \left[f^{-1} \right]_{\mathcal{P}} \left[a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right]_{\mathcal{P}} \\
 = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} a_0 + a_4 \\ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \\ a_3 \\ a_0 \\ a_0 + a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} \\
 = & \left[\begin{bmatrix} a_0 + a_4 & a_1 + a_2 + a_4 + a_5 & a_3 \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{M}}.
 \end{aligned}$$

Řešení (pokračování). Jelikož je $[\cdot]_{\mathcal{M}}$ prosté (protože je isomorfismus), platí

$$\begin{aligned} & f^{-1}\left(a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + a_4 & a_1 + a_2 + a_4 + a_5 & a_3 \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pro všechna $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z}_2$.

- **Nepovinné:** Protože je snadné udělat chybu ve výpočtech, je vhodné ověřit si vzorce pro f a f^{-1} .
 - Pro f to provedeme tak, že do nalezeného vzorce pro f (z části (d)) dosadíme matice $M_1, \dots, M_8$ a ověříme, že skutečně dostaneme polynomy $p_1(x), \dots, p_8(x)$, resp.
 - Podobně pro f^{-1} postupujeme tak, že do nalezeného vzorce pro f^{-1} (z části (e)) dosadíme polynomy $p_1(x), \dots, p_8(x)$ a ověříme, že skutečně dostaneme matice $M_1, \dots, M_8$, resp.
 - Podrobnosti: skripta.



- Další příklady: skripta (Penev, oddíl 4.5).