

Lineární algebra 1

Přednáška č.11

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory (část 2)

Irena Penev

17.12.2025

- Tato přednáška má šest částí:
 - 1 Pár připomenutí z minulých přednášek
 - 2 Lineární zobrazení a báze
 - 3 Obraz a jádro lineárního zobrazení
 - 4 Hodnost lineárního zobrazení
 - 5 Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení
 - 6 Pár vět o prostých a na lineárních zobrazeních

- ❶ Pár připomenutí z minulých přednášek zobrazení

Věta 6 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $U \subseteq V$. Pak je U podprostorem V právě tehdy, když platí:

- ❶ $\mathbf{0} \in U$;^a
- ❷ množina U je uzavřena vzhledem k sčítání, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$:
 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$;
- ❸ množina U je uzavřena vzhledem k násobení skalárem, tj.
 $\forall \mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha \mathbf{u} \in U$.

^aTady je $\mathbf{0}$ nulový vektor vektorového prostoru V .

Věta 6 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

- Je-li $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, a platí-li pro vektor $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

pak nazýváme vektor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

souřadnicovým vektorem vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

Věta 8 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ ($k \geq 0$).^a Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$;
- Ⓑ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor V ;
- Ⓒ pro každý podprostor U vektorového prostoru V t.ž. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, pak $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor U ;
- Ⓓ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je roven průniku všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

^aPokud $k = 0$, pak je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ prázdná, a platí $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\mathbf{0}\}$.

Tvrzení 9 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $B \subseteq V$ je konečná množina, která generuje V . Pak $\exists B' \subseteq B$ t.ž. B' je báze V .

Tvrzení 1 z Přednášky č.9

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Věta 4 z Přednášky č.9

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a U je podprostor V . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ U je konečnědimenzionální;
- Ⓑ $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓒ $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$.

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je *lineární* pokud splňuje následující axiomy:

- ① $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U: f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2);$
- ② $\forall \mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

Tvrzení 20 z Přednášky č.10

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.^a

^aPřesněji: $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$, kde $\mathbf{0}_U$ je nulový vektor prostoru U , zatímco je $\mathbf{0}_V$ nulový vektor prostoru V .

2 Lineární zobrazení a báze

- Připomenutí:

Věta 5 z Přednášky č.4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{F}^n$ a položíme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z $\mathbb{F}^m$. Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Tuto větu lze zobecnit!

Věta 1

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ je libovolná báze prostoru U a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.^a Pak existuje jediné lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž.
 $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$. Navíc je-li U netriviální (tj. $n \neq 0$), pak je f určeno následujícím předpisem: pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$$f(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \text{kde } [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T.$$

Na druhou stranu, je-li U triviální (tj. $U = \{\mathbf{0}\}$, a tedy $n = 0$ a $\mathcal{B} = \emptyset$), pak je zobrazení $f : U \rightarrow V$ určeno předpisem $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

^aZde jsou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ libovolné vektory z V .

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že U je triviální, a tedy $n = 0$ a $U = \{\mathbf{0}\}$. Pak je zřejmé, že zobrazení $f : U \rightarrow V$, definované předpisem $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, je lineární, a navíc triviálně platí $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$ (protože $n = 0$, tj. posloupnosti vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou prázdné). Jedinečnost plyne ze skutečnosti, že každé lineární zobrazení zobrazuje nulový vektor na nulový vektor (podle Tvzení 20 z Přednášky č.10).

Od této chvíle budeme předpokládat, že vektorový prostor U je netriviální, tj. že $n \neq 0$. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost lineárního zobrazení f , které splňuje požadované vlastnosti.

Důkaz (pokračování). **Existence.** Nechť je zobrazení $f : U \rightarrow V$ definováno následujícím předpisem: pro všechna $\mathbf{u} \in U$

$$f(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \text{kde } [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]^T.$$

Tedy $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ platí

$$f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Je třeba dokázat, že zobrazení f je lineární a splňuje $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$. Pro druhé z těchto tvrzení si všimněme, že $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_i) &= f(0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_{i-1} + 1\mathbf{u}_i + 0\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{u}_n) \\ &= 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n \\ &= \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$.

Důkaz (pokračování). Dokažme, že f je lineární. Je třeba ověřit, že f splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení.

1. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. Je třeba dokázat, že $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Položme $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$ a $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$.

Pak platí $[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 + \beta_1 \ \dots \ \alpha_n + \beta_n]^T$.

- Vskutku, jelikož $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$ a $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$, platí $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ a $\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$.

- Tedy $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{v}_n$, a proto

$$[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 + \beta_1 \ \dots \ \alpha_n + \beta_n]^T.$$

Plyne, že

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &\stackrel{(*)}{=} (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{v}_n \\ &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) + (\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ &\stackrel{(**)}{=} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

kde $(*)$ a $(**)$ plynou z definice zobrazení f .

Důkaz (pokračování). 2. Nechť $\mathbf{u} \in U$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. Je třeba dokázat, že $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$. Položme $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$. Pak platí $[\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha\alpha_1 \ \dots \ \alpha\alpha_n]^T$.

- Vskutku, jelikož $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$, platí $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$.

- Tedy $\alpha\mathbf{x} = (\alpha\alpha_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{v}_n$, a proto $[\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha\alpha_1 \ \dots \ \alpha\alpha_n]^T$.

Plyne, že

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u}) &\stackrel{(*)}{=} (\alpha\alpha_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{v}_n \\ &= \alpha(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &\stackrel{(**)}{=} \alpha f(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

kde $(*)$ a $(**)$ plynou z definice zobrazení f .

Z (1) a (2) plyne, že zobrazení f je lineární. Tím je dokázána existence.

Důkaz (pokračování). **Jednoznačnost.** Nechť $f_1, f_2 : U \rightarrow V$ jsou lineární zobrazení, která splňují $f_1(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f_1(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$ a $f_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f_2(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$. Je třeba dokázat, že $f_1 = f_2$. Nechť $\mathbf{u} \in U$. Stačí dokázat, že $f_1(\mathbf{u}) = f_2(\mathbf{u})$. Položme $[\mathbf{u}]_B = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$. Pak platí

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{u}) &= f_1(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) \\
 &= \alpha_1 f_1(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n f_1(\mathbf{u}_n) && \text{podle linearity } f_1 \\
 &= \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n && \text{protože } f_1(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f_1(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n \\
 &= \alpha_1 f_2(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n f_2(\mathbf{u}_n) && \text{protože } f_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f_2(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n \\
 &= f_2(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) && \text{podle linearity } f_2 \\
 &= f_2(\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $f_1 = f_2$. Tím je dokázána jednoznačnost. $\square$

Věta 1

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ je libovolná báze prostoru U a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.^a Pak existuje jediné lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž.
 $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$. Navíc je-li U netriviální (tj. $n \neq 0$), pak je f určeno následujícím předpisem: pro všechna $\mathbf{u} \in U$ platí

$$f(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \text{kde } [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T.$$

Na druhou stranu, je-li U triviální (tj. $U = \{\mathbf{0}\}$, a tedy $n = 0$ a $\mathcal{B} = \emptyset$), pak je zobrazení $f : U \rightarrow V$ určeno předpisem $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

^aZde jsou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ libovolné vektory z V .

Důsledek 2

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z U a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.^a Pak existuje lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž.
 $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}_k$. Navíc je-li V netriviální, pak je toto zobrazení jediné právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ tvoří bázi prostoru U .

^aZde jsou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ libovolné vektory z V .

- **Poznámka:** Je-li V triviální (tj. $V = \{\mathbf{0}\}$, a tedy $\mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$), pak existuje právě jedno **zobrazení** z U do V .
 - Toto zobrazení zobrazuje všechny vektory z U na $\mathbf{0}$ a je zřejmé, že je lineární.

Důsledek 2

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z U a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.^a Pak existuje lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ t.ž.

$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}_k$. Navíc je-li V netriviální, pak je toto zobrazení jediné právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ tvoří bázi prostoru U .

^aZde jsou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ libovolné vektory z V .

Důkaz (nástin). Nejprve rozšíříme lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ do báze prostoru U (pomocí Tvzení 1 z Přednášky č.9), pak použijeme Větu 1. $\square$

2. Obraz a jádro lineárního zobrazení

- Pro zobrazení $f : A \rightarrow B$ (ne nutně lineární) definujeme:
 - $\forall A' \subseteq A$: množinu $f[A'] := \{f(a) \mid a \in A'\}$ nazýváme *obrazem* (pod)množiny A' při zobrazení f ;
 - množinu $\text{Im}(f) := f[A]$ nazýváme *obrazem* zobrazení f ;
 - $\forall B' \subseteq B$: množinu $f^{-1}[B'] := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ nazýváme *vzorem* (pod)množiny B' při zobrazení f .
- **Poznámka:** Je-li $f : A \rightarrow B$ **bijekce**, pak má f inverzní funkci $f^{-1} : B \rightarrow A$.
 - V tomto případě pro podmnožinu $B' \subseteq B$ lze značení $f^{-1}[B']$ interpretovat dvěma způsoby:
 - jako vzor podmnožiny B' při f ,
 - jako obraz podmnožiny B' při f^{-1} .
 - Ve obou případech bude $f^{-1}[B']$ stejnou podmnožinou množiny A , a proto obvykle není nutné zdůrazňovat, kterou interpretaci jsme zvolili.

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. *Jádrem* lineárního zobrazení $f : U \rightarrow V$ rozumíme množinu

$$\text{Ker}(f) := \{\mathbf{u} \in U \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

- Angl.: $\text{Ker}(f)$ = kernel of f
- **Poznámky:**
 - $\text{Ker}(f) = f^{-1}[\{\mathbf{0}\}]$, tj. $\text{Ker}(f)$ je vzor množiny $\{\mathbf{0}\}$ při f .
 - $\text{Ker}(f)$ je definován pouze pro **lineární** zobrazení (ne pro libovolná zobrazení).

Tvrzení 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení, a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice f v.k.k.b. Pak platí:

- a) $\text{Im}(f) = \text{Col}(A)$;
- b) $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(A)$.

Důkaz. Pro (a) stačí si všimnout, že

$$\text{Col}(A) \stackrel{(*)}{=} \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m\} \stackrel{(**)}{=} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m\} = \text{Im}(f),$$

kde (*) plyne z Tvrzení 1 z Přednášky č.10, zatímco (**) plyne ze skutečnosti, že $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$, protože A je maticí f ve v.k.k.b.

Tvrzení 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení, a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice f v.k.k.b. Pak platí:

- a) $\text{Im}(f) = \text{Col}(A)$;
- b) $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(A)$.

Důkaz (pokračování). Pro (b) si všimněme, že

$$\begin{aligned}\text{Nul}(A) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \\ &= \text{Ker}(f),\end{aligned}$$

kde (*) plyne ze skutečnosti, že $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$, protože A je maticí f ve v.k.k.b. $\square$

Příklad

Uvažujme reálný vektorový prostor $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ všech polynomů, jejichž koeficienty jsou reálná čísla. Lineární zobrazení $D : \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ je dané předpisem

$$D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

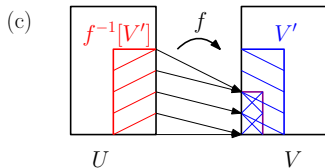
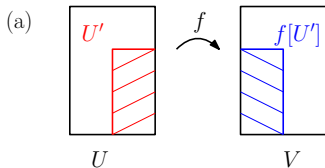
(Skutečnost, že D je lineární, jsme dokázali v jednom z příkladů z Přednášky č.10.) Pak platí:

- $\text{Ker}(D)$ je množinou všech **konstantních** polynomů z $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$;
- $\text{Im}(D)$ je množinou **všech** polynomů z $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$, tj. $\text{Im}(D) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$.

Věta 4

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí:

- Ⓐ pro každý podprostor U' prostoru U je $f[U']$ podprostorem prostoru V ;
- Ⓑ $\text{Im}(f)$ je podprostorem prostoru V ;
- Ⓒ pro každý podprostor V' prostoru V je $f^{-1}[V']$ podprostorem prostoru U ;
- Ⓓ $\text{Ker}(f)$ je podprostorem prostoru U .



Věta 4

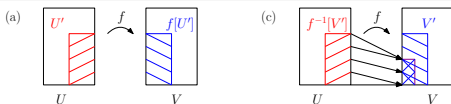
Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí:

- Ⓐ pro každý podprostor U' prostoru U je $f[U']$ podprostorem prostoru V ;
- Ⓑ $\text{Im}(f)$ je podprostorem prostoru V ;
- Ⓒ pro každý podprostor V' prostoru V je $f^{-1}[V']$ podprostorem prostoru U ;
- Ⓓ $\text{Ker}(f)$ je podprostorem prostoru U .

Důkaz. Nejprve si všimněme, že

- část (b) je speciální případ části (a) pro $U' := U$, protože $\text{Im}(f) = f[U]$;
- část (d) je speciální případ části (c) pro $V' := \{\mathbf{0}\}$, protože $\text{Ker}(f) = f^{-1}[\{\mathbf{0}\}]$.

Tedy stačí dokázat (a) a (c). Dokážeme (a). Důkaz části (c) je podobný (viz skripta - Penev, Theorem 4.2.3).



- Ⓐ pro každý podprostor U' prostoru U je $f[U']$ podprostorem prostoru V ;

Důkaz (a). Nechť U' je podprostor prostoru U .

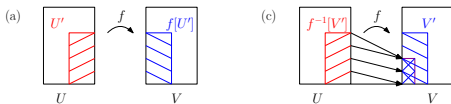
Abychom předešli případným nejasnostem, budeme nulové vektory vektorových prostorů U a V označovat $\mathbf{0}_U$ a $\mathbf{0}_V$, respektive.

Vzhledem k Věty 6 z Přednášky č.7 stačí dokázat:

- Ⓐ $\mathbf{0}_V \in f[U']$;
- Ⓑ $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in f[U']: \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in f[U']$;
- Ⓒ $\forall \mathbf{v} \in f[U'], \alpha \in \mathbb{F}: \alpha \mathbf{v} \in f[U']$.

Dokážeme (i) a (ii). Důkaz (iii) je podobný důkazu (ii).

Dokažme nejprve (i). Jelikož U' je podprostorem prostoru U , vyplývá z Věty 6 z Přednášky č.7, že $\mathbf{0}_U \in U'$. Na druhou stranu, z Tvzení 20 z Přednášky č.10 plyne, že $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$. Tedy platí $\mathbf{0}_V = f(\mathbf{0}_U) \in f[U']$, čímž jsme dokázali (i).



- Ⓐ pro každý podprostor U' prostoru U je $f[U']$ podprostorem prostoru V ;

Důkaz (a) (pokračování). Zbývá dokázat

- Ⓐ $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in f[U']: \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in f[U']$.

Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in f[U']$. Je potřeba dokázat, že $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in f[U']$.

Jelikož $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in f[U']$, víme, že $\exists \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U'$ t.ž. $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{u}_1)$ a $\mathbf{v}_2 = f(\mathbf{u}_2)$. Jelikož je U' podprostorem prostoru U , víme, že $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U'$. Nyní platí,

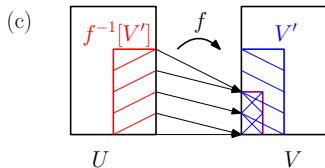
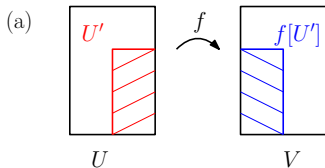
$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2) \stackrel{(*)}{=} f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \stackrel{(**)}{\in} f[U'],$$

kde $(*)$ plyne z linearitě f , zatímco $(**)$ plyne ze skutečnosti, že $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U'$. Tím jsme dokázali (ii). $\square$

Věta 4

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí:

- Ⓐ pro každý podprostor U' prostoru U je $f[U']$ podprostorem prostoru V ;
- Ⓑ $\text{Im}(f)$ je podprostorem prostoru V ;
- Ⓒ pro každý podprostor V' prostoru V je $f^{-1}[V']$ podprostorem prostoru U ;
- Ⓓ $\text{Ker}(f)$ je podprostorem prostoru U .



Věta 5

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak je f prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Důkaz. Abychom předešli případným nejasnostem, budeme nulové vektory vektorových prostorů U a V označovat $\mathbf{0}_U$ a $\mathbf{0}_V$, respektive. Je třeba dokázat, že f je prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_U\}$.

Předpokládejme nejprve, že f je prosté. Je třeba dokázat, že $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_U\}$.

Podle Tvrzení 20 z Přednášky č.10 platí $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$, a tedy $\mathbf{0}_U \in \text{Ker}(f)$.

Zbývá dokázat, že $\mathbf{0}_U$ je **jediný** prvek $\text{Ker}(f)$. Nechť $\mathbf{u} \in \text{Ker}(f)$. Pak platí $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V = f(\mathbf{0}_U)$. Jelikož je f prosté, plyne, že $\mathbf{u} = \mathbf{0}_U$. Tím jsme dokázali, že $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_U\}$.

Věta 5

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak je f prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Důkaz (pokračování). Předpokládejme nyní, že $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_U\}$. Je třeba dokázat, že f je prosté.

Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ jsou, t.ž. $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Je třeba dokázat, že $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Všimněme si, že

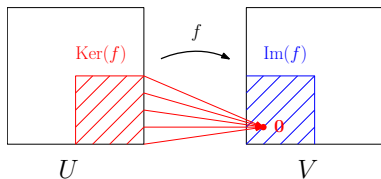
$$f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \stackrel{(*)}{=} f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2) \stackrel{(**)}{=} \mathbf{0}_V,$$

kde $(*)$ plyne z linearitě f , zatímco $(**)$ plyne ze skutečnosti, že $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$.

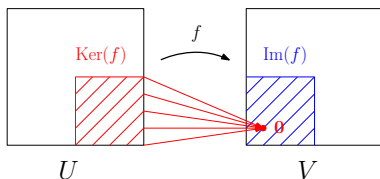
Tedy $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \text{Ker}(f)$. Jelikož $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_U\}$, plyne, že $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}_U$, a tedy $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Tím jsme dokázali, že f je prosté. $\square$

4 Hodnost lineárního zobrazení

- Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení.
- Podle Věty 4 je $\text{Im}(f)$ podprostorem prostoru V , zatímco $\text{Ker}(f)$ je podprostorem prostoru U .



- *Hodnost* lineárního zobrazení f je $\text{rank}(f) := \dim(\text{Im}(f))$, zatímco *nulita* f je $\dim(\text{Ker}(f))$.
- Pozorujme, že hodnost a nulita f mohou být i nekonečné.



- $\text{rank}(f) := \dim(\text{Im}(f))$

Tvrzení 6

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $\text{rank}(f) \leq \dim(V)$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $n := \dim(V)$ je konečná, protože jinak je tvrzení zřejmé.

Podle Věty 4 je $\text{Im}(f)$ podprostorem prostoru V , a proto podle Věty 4 z Přednášky č.9 platí $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(V)$, tj. $\text{rank}(f) \leq \dim(V)$. $\square$

- Připomenutí:

Věta 5

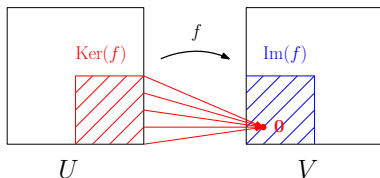
Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak je f prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

- Pro surjektivní („na“) lineární zobrazení máme následující tvrzení:

Tvrzení 7

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Předpokládejme, že V je **konečnědimenzionální**. Pak je f surjektivní („na“) právě tehdy, když $\text{rank}(f) = \dim(V)$.

- **Pozor:** Tvrzení 7 platí pouze pro lineární zobrazení, jejichž kodoména je **konečnědimenzionální**.



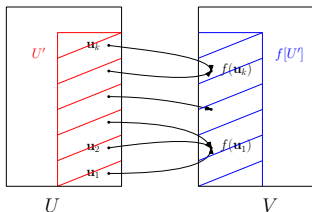
Tvrzení 7

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Předpokládejme, že V je **konečnědimenzionální**. Pak je f surjektivní („na“) právě tehdy, když $\text{rank}(f) = \dim(V)$.

Důkaz. Je-li f surjektivní, pak platí $\text{Im}(f) = V$, a tedy $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$.

Předpokládejme nyní, že $\text{rank}(f) = \dim(V)$, tj.

$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$. Jelikož je V **konečnědimenzionální**, plyne z Věty 4 z Přednášky č.9, že $\text{Im}(f) = V$, a tedy je f surjektivní. $\square$

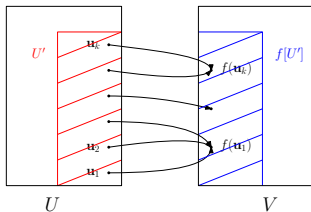


Věta 8

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ a položme $U' := \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$. Pak platí:

- Ⓐ U' je podprostorem prostoru U a $f[U']$ je podprostorem prostoru V ;
- Ⓑ $f[U'] = f[\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)] = \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$, tj. vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují $f[U']$;^a
- Ⓒ $\dim(f[U']) \leq \dim(U') \leq k$.

^aNeformálně: „Lineární obal obrazů je roven obrazu lineárního obalu.“



- Ⓐ U' je podprostorem prostoru U a $f[U']$ je podprostorem prostoru V ;

Důkaz (a). Podle Věty 8 z Přednášky č.7 je U' podprostorem U , zatímco podle Věty 4(a) je $f[U']$ podprostorem V . $\square$

- ⓑ $f[U'] = f[\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)] = \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$, tj.
vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují $f[U']$;

Důkaz (b).

$$\begin{aligned}\text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)) &= \{ \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{ f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \} \\ &\stackrel{(**)}{=} \{ f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \} \\ &= f[\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)] \\ &= f[U'],\end{aligned}$$

kde (*) plyne z linearit y f , zatímco (**) plyne z definice lineárního obalu, tj. ze skutečnosti, že

$$\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \}. \quad \square$$

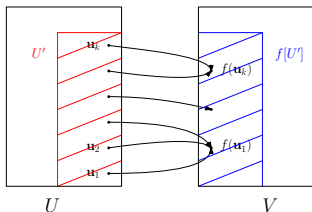
③ $\dim(f[U']) \leq \dim(U') \leq k.$

Důkaz (c). Jelikož množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ generuje U' , plyne z Tvzení 9 z Přednášky č.8, že nějaká její podmnožina, například $\{\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}\}$ (kde $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq k$), je bází U' . Tedy $\dim(U') = m \leq k.$

Vektory $\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}$ tedy generují U' . Aplikujeme-li (b) na vektory $\mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_m}$ (namísto $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$), dostáváme, že vektory $f(\mathbf{u}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{u}_{i_m})$ generují $f[U']$.

Použijeme-li nyní Tvzení 9 z Přednášky č.8 ještě jednou, dostáváme, že nějaká podmnožina množiny $\{f(\mathbf{u}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{u}_{i_m})\}$ je bází $f[U']$, a tedy $\dim(f[U']) \leq m$

Plyne, že $\dim(f[U']) \leq m = \dim(U') \leq k.$ □

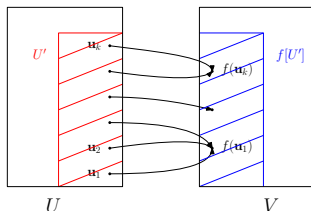


Věta 8

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ a položme $U' := \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$. Pak platí:

- Ⓐ U' je podprostorem prostoru U a $f[U']$ je podprostorem prostoru V ;
- Ⓑ $f[U'] = f[\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)] = \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$, tj. vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují $f[U']$;^a
- Ⓒ $\dim(f[U']) \leq \dim(U') \leq k$.

^aNeformálně: „Lineární obal obrazů je roven obrazu lineárního obalu.“



- Následující důsledek plyne přímo z Věty 8 (pro $U' = U$).

Důsledek 9

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Nechť vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ generují U . Pak platí $\text{Im}(f) = \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$ a

$$\text{rank}(f) = \dim(\text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))) \leq \dim(U) \leq k.$$

- Připomenutí:

Tvrzení 6

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $\text{rank}(f) \leq \dim(V)$.

Důsledek 9

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Nechť vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ generují U . Pak platí $\text{Im}(f) = \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$ a

$$\text{rank}(f) = \dim(\text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))) \leq \dim(U) \leq k.$$

Důsledek 10

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $\text{rank}(f) \leq \min \{ \dim(U), \dim(V) \}$.

Důsledek 10

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $\text{rank}(f) \leq \min \{\dim(U), \dim(V)\}$.

Důkaz. Je třeba dokázat, že

- (1) $\text{rank}(f) \leq \dim(U)$;
- (2) $\text{rank}(f) \leq \dim(V)$.

Je zřejmé, že (2) plyne přímo z Důsledku 6.

Zbývá dokázat (1). Je-li U nekonečnědimenzionální, pak je (1) triviální. Můžeme tedy předpokládat, že U je konečnědimenzionální. Pak má U (konečnou) bázi, například $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, a tedy vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ generují U . Odtud (1) plyne přímo z Důsledku 9. $\square$

- Připomenutí:

Tvrzení 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení, a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice f v.k.k.b. Pak platí:

- a) $\text{Im}(f) = \text{Col}(A)$;
- b) $\text{Ker}(f) = \text{Nul}(A)$.

- Plyne, že:

Tvrzení 11

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Nechť $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice f v.k.k.b. Pak platí:

- a) $\text{rank}(f) = \text{rank}(A)$;
- b) $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Nul}(A))$.

Důkaz. Část (b) plyne z Tvrzení 3(b). Pro (a) stačí si všimnout, že $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \stackrel{\text{Tv.1(a)}}{=} \dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$. $\square$

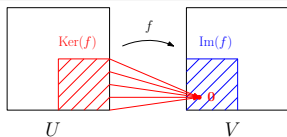
- 5 Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení
- Připomenutí (z Přednášky č.10):

Věta o hodnotě matice a dimenzi jádra (Rank-nullity theorem)

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = \underbrace{m}_{\substack{= \text{počet} \\ \text{sloupců} \\ \text{matice } A}}.$$

- Věta o hodnotě matice a dimenzi jádra má obdobu pro lineární zobrazení, která se nazývá „věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení“ (angl.: rank-nullity theorem)



Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení (Rank-nullity theorem)

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Pak pro každé lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ platí

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(U),$$

a zejména jsou $\text{Ker}(f)$ a $\text{Im}(f)$ konečnědimenzionální.

- Větu dokážeme za chvíli, ale nejprve ukažme, že tato věta přímo implikuje větu o hodnotě matice a dimenzi jádra.

Rank-nullity theorem
(linear function version)



Rank-nullity theorem
(matrix version)

Věta o hodnotě matice a dimenzi jádra (Rank-nullity theorem)

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = \underbrace{m}_{\substack{= \text{počet} \\ \text{sloupců} \\ \text{matice } A}}.$$

Důkaz (za předpokladu věty o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení). Nechť zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je dáno předpisem $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m$. Pak je f maticové (a tedy lineární) zobrazení a A je jeho matice v.k.k.b. Nyní platí,

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) &\stackrel{\text{Tvzení 11}}{=} \text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \dim(\mathbb{F}^m) = m, \end{aligned}$$

kde $(*)$ plyne z věty o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení. $\square$

Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení (Rank-nullity theorem)

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Pak pro každé lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ platí

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(U),$$

a zejména jsou $\text{Ker}(f)$ a $\text{Im}(f)$ konečnědimenzionální.

Důkaz. Podle Věty 4 je $\text{Ker}(f)$ podprostorem prostoru U , zatímco $\text{Im}(f)$ je podprostorem prostoru V .

Jelikož je U konečnědimenzionální, vyplývá z Věty 4 z Přednášky č.9, že podprostor $\text{Ker}(f)$ je také konečnědimenzionální, přičemž platí $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(U)$. Položme:

- $k := \dim(\text{Ker}(f))$;
- $m := \dim(U)$

Tedy platí $k \leq m$.

Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení (Rank-nullity theorem)

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Pak pro každé lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ platí

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(U),$$

a zejména jsou $\text{Ker}(f)$ a $\text{Im}(f)$ konečnědimenzionální.

Důkaz (pokračování). Připomenutí:

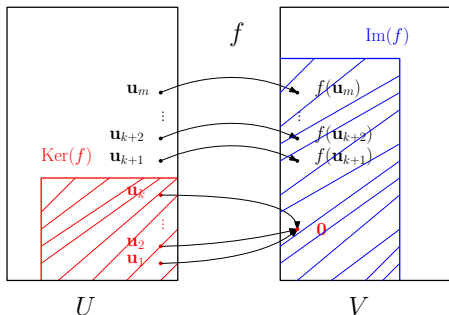
- $k := \dim(\text{Ker}(f))$;
- $m := \dim(U)$

Podle definice platí $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f))$. Tedy zbývá dokázat, že $\text{Im}(f)$ má bázi mohutnosti $m - k$. Vskutku, z toho bude plynout, že $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = m - k$, a tedy

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = (m - k) + k = m = \dim(U).$$

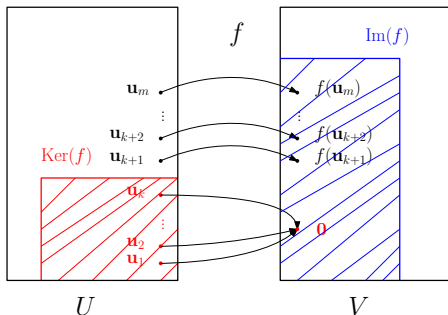
čímž bude důkaz hotov.

Důkaz (pokračování). Připomenutí: $k = \dim(\text{Ker}(f))$, $m = \dim(U)$, $k \leq m$. Je třeba dokázat, že $\text{Im}(f)$ má bázi mohutnosti $m - k$.



Nechť $\{u_1, \dots, u_k\}$ je báze $\text{Ker}(f)$. Pak je $\{u_1, \dots, u_k\}$ lineárně nezávislá množina konečnědimenzionálního prostoru U . Tedy podle Tvzení 1 z Přednášky č.9 lze $\{u_1, \dots, u_k\}$ rozšířit do báze $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ prostoru U . Důkaz ukončíme tím, že dokážeme, že $\{f(u_{k+1}), \dots, f(u_m)\}$ je bází podprostoru $\text{Im}(f)$.

Důkaz (pokračování).



Stačí dokázat následující dvě tvrzení.

Tvrzení 1. Vektory $f(u_{k+1}), \dots, f(u_m)$ jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení 2. Vektory $f(u_{k+1}), \dots, f(u_m)$ generují $\text{Im}(f)$, tj. $\text{Im}(f) = \text{Span}(f(u_{k+1}), \dots, f(u_m))$.

Dokážeme je jedno po druhém.

Tvrzení 1. Vektory $f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz Tvrzení 1. Necht' $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ jsou skaláry t.ž.

$$\alpha_{k+1}f(\mathbf{u}_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(\mathbf{u}_m) = \mathbf{0}.$$

Nyní je třeba dokázat, že $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$. Všimněme si, že

$$f(\alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m) \stackrel{(*)}{=} \alpha_{k+1}f(\mathbf{u}_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(\mathbf{u}_m) = \mathbf{0},$$

kde $(*)$ plyne z linearit y zobrazení f . Nyní platí

$$\alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m \in \text{Ker}(f).$$

Jelikož je $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ báze podprostoru $\text{Ker}(f)$, plyne, že

$\alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, tj. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{u}_k.$$

Tvrzení 1. Vektory $f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz Tvrzení 1 (pokračování). Připomenutí:

$$\alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{u}_k.$$

Je třeba dokázat, že $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$.

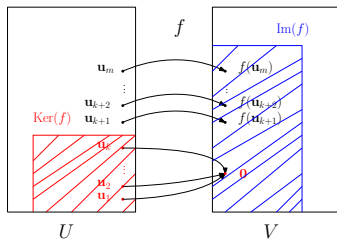
Nyní platí

$$-\alpha_1\mathbf{u}_1 - \dots - \alpha_k\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Jelikož jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ lineárně nezávislé, protože tvoří bázi prostoru U , plyne, že

$$-\alpha_1 = \dots = -\alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0.$$

Zejména platí $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$, čímž jsme dokázali, že vektory $f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)$ jsou lineárně nezávislé. ♦



Tvrzení 2. Vektory $f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)$ generují $\text{Im}(f)$, tj.
 $\text{Im}(f) = \text{Span}(f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m))$.

Důkaz Tvrzení 2. Jelikož vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ tvoří bázi prostoru U (a tedy generují U), platí:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &\stackrel{\text{Důsledek 9}}{=} f[\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m)] \\
 &= \text{Span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k), f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \text{Span}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)) \\
 &= \text{Span}(f(\mathbf{u}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{u}_m)),
 \end{aligned}$$

kde $(*)$ plyne ze skutečnosti, že $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{Ker}(f)$. $\blacklozenge \square$

Věta o dimenzích obrazu a jádra lineárního zobrazení (Rank-nullity theorem)

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a předpokládejme, že U je konečnědimenzionální. Pak pro každé lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ platí

$$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(U),$$

a zejména jsou $\text{Ker}(f)$ a $\text{Im}(f)$ konečnědimenzionální.

Důsledek 12

Nechť U a V jsou **konečnědimenzionální** vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ t.ž. **$\dim(U) = \dim(V)$** . Pak jsou pro každé **lineární zobrazení** $f : U \rightarrow V$ ekvivalentní následující tvrzení:

- (i) f je injektivní (prosté);
- (ii) f je surjektivní (na);
- (iii) f je bijektivní (a tedy je izomorfismem).

Důsledek 12

Nechť U a V jsou **konečnědimenzionální** vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ t.ž. $\dim(U) = \dim(V)$. Pak jsou pro každé **lineární zobrazení** $f : U \rightarrow V$ ekvivalentní následující tvrzení:

- (i) f je injektivní (prosté);
- (ii) f je surjektivní (na);
- (iii) f je bijektivní (a tedy je izomorfismem).

Důkaz. Z definice platí

$$((i) \wedge (ii)) \iff (iii).$$

Tedy stačí dokázat, že tvrzení (i) a (ii) jsou ekvivalentní.

Podle věty o dimenzích obrazu a jádra platí
 $\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(U)$.

Jelikož $\dim(U) = \dim(V)$, plyne, že
 $\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(V)$.

Důsledek 12

Nechť U a V jsou **konečnědimenzionální** vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ t.ž. $\dim(U) = \dim(V)$. Pak jsou pro každé **lineární zobrazení** $f : U \rightarrow V$ ekvivalentní následující tvrzení:

- (i) f je injektivní (prosté);
- (ii) f je surjektivní (na);
- (iii) f je bijektivní (a tedy je izomorfismem).

Důkaz (pokračování). Připomenutí:

$\text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(V)$; je třeba dokázat „(i) $\iff$ (ii)“.

Tedy jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i') $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, tj. $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$;
- (ii') $\text{rank}(f) = \dim(V)$.

Navíc:

- podle Věty 5: (i) $\iff$ (i');
- podle Tvrzení 7: (ii) $\iff$ (ii').

Plyne, že tvrzení (i) a (ii) jsou ekvivalentní. $\square$

- 6 Pár vět o prostých a na lineárních zobrazeních
- Nyní uvedeme dvě věty bez důkazu.
 - Jejich důkazy jsou poměrně jednoduché a naleznete je ve skriptech (Penev, Theorem 4.2.13, Theorem 4.2.14).

Věta 13

Nechť U a V jsou vektorové prostory a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak pro libovolné vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ platí:

- a je-li f prosté a jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé v U , pak jsou vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislé ve V ;
- b jsou-li vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislé ve V , pak jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé v U ;
- c je-li f na a generují-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ prostor U , pak vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují prostor V ;
- d je-li f prosté a generují-li vektory $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ prostor V , pak vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ generují prostor U .

- Schematická (a trochu neformální) formulace Věty 13:

$$f : U \xrightarrow{\text{lineární}} V$$

(a)-(b)	$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé ve prostoru U	když f je prosté $\implies$ $\Longleftarrow$ vždy	$f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé ve prostoru V
(c)-(d)	$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ generují U	když f je na $\implies$ $\Longleftarrow$ když f je prosté	$f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$ generují V

Věta 14

Nechť U a V jsou vektorové prostory a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí:

- Ⓐ je-li f prosté, pak $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓑ je-li f na, pak $\dim(U) \geq \dim(V)$;
- Ⓒ je-li f izomorfismem, pak $\dim(U) = \dim(V)$.