

Lineární algebra 1

Přednáška č.10

Maticové prostory. Lineární zobrazení mezi
vektorovými prostory (část 1)

Irena Penev

10.12.2025

- Tato přednáška má osm částí:
 - 1 Pár připomenutí z minulých přednášek
 - 2 Sloupcový prostor a řádkový prostor matice
 - 3 Matice plné hodnotí
 - 4 Hodnost maticového součinu. Levá a pravá inverze matice
 - 5 Rozšiřování lineárně nezávislé množiny do báze $\mathbb{F}^n$
 - 6 Jádro matice
 - 7 Věta o regulárních maticích (v.2)
 - 8 Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory (část 1)

- ① Pár připomenutí z minulých přednášek

Věta 18 z Přednášky č.5

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ jsou matice. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ $A \sim B$;
- Ⓑ existují elementární matice $E_1, \dots, E_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$ t.ž.
 $B = E_1 \dots E_k A$;
- Ⓒ existuje regulární matice $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ t.ž. $B = CA$.

Věta 8 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ ($k \geq 0$).^a Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$;
- Ⓑ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor V ;
- Ⓒ pro každý podprostor U vektorového prostoru V t.ž. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, pak $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor U ;
- Ⓓ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je roven průniku všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

^aPokud $k = 0$, pak je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ prázdná, a platí $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\mathbf{0}\}$.

Věta 6 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

- Je-li $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, a platí-li pro vektor $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

pak nazýváme vektor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

souřadnicovým vektorem vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

Věta 4 z Přednášky č.9

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a U je podprostor V . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ U je konečnědimenzionální;
- Ⓑ $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓒ $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$.

2 Sloupcový prostor a řádkový prostor matice

Definice

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice.

- *Sloupcový prostor* matice A , který značíme $\text{Col}(A)$, je podprostor $\mathbb{F}^n$ generovaný sloupci matice A ; ^a
- *Řádkový prostor* matice A , který značíme $\text{Row}(A)$, je podprostor $\mathbb{F}^{1 \times m}$ generovaný řádky matice A . ^b

^aTj. $\text{Col}(A) := \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$, kde $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$.

^bTj. $\text{Row}(A) := \text{Span}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, kde $A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí:

- Ⓐ $\text{Col}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m\};$
- Ⓑ $\text{Row}(A) = \{\mathbf{x}A \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^{1 \times n}\}.$ ^a

^a „ $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ “ znamená, že $\mathbf{x}$ je řádkový vektor délky n se složkami z $\mathbb{F}$.

Důkaz. (a) Položme $A = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m]$. Pak platí:

$$\begin{aligned}\text{Col}(A) &= \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) && \text{dle definice} \\ &= \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m\} && \text{dle Tvrzení 1 z Přednášky č.3}\end{aligned}$$

(b) Podobně! (Zkuste sami, nebo viz skripta - Penev, Proposition 3.3.2). $\square$

- Připomenutí:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] &
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 \text{REF} & \text{RREF}
 \end{array}$$

- *Pivoty* libovolné matice A jsou *pivoty* libovolného odstupňovaného tvaru matice A .
- *Bázické sloupce* matice A jsou sloupce, které obsahují pivot, a ty ostatní sloupce jsou *nebázické*.
- Např. (pivoty jsou zvýrazněny rámečkem, bázické sloupce jsou červené):

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \boxed{0} & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\
 2 & \boxed{1} & -4 & 13 & -4 & 3 \\
 2 & 3 & 0 & 11 & \boxed{-6} & 5
 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc}
 \boxed{2} & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\
 0 & \boxed{-2} & -4 & 2 & 2 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2
 \end{array} \right]$$

- *Hodnost* matice A , značená $\text{rank}(A)$, je počet pivotů matice A (ekvivalentně: počet bázických sloupců matice A).
 - Ekvivalentně: $\text{rank}(A)$ je počet nenulových řádků v jakémkoliv odstupňovaném tvaru matice A .

- Následující věty nám dávají recept, jak vypočítat báze sloupcového nebo řádkového prostoru matice.

Věta 2

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak bázické sloupce matice A tvoří bázi $\text{Col}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$.

Věta 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a U je libovolný odstupňovaný tvar matice A .^a Pak nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

^a U může, ale nemusí, být **redukovaným** odstupňovaným tvarem matice A .

- Nejdříve se podíváme na příklad, pak dáme nástin důkazů Vět 2 a 3.
 - Pro formální důkazy Vět 2 a 3, viz skripta (Penev - Theorem 3.3.4, Theorem 3.3.9).

Příklad

Uvažujme následující reálnou matici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Vypočítejte $\text{rank}(A)$.
- b) Vypočítejte bázi $\text{Col}(A)$.
- c) Vypočítejte bázi $\text{Row}(A)$.

Řešení. Pomocí Gaussovy eliminace lze vypočítat následující odstupňovaný tvar matice A :

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Vypočítejte $\text{rank}(A)$.
- b) Vypočítejte bázi $\text{Col}(A)$.
- c) Vypočítejte bázi $\text{Row}(A)$.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=U}$$

(a) Matice U má tři bázecké sloupce, a proto $\text{rank}(A) = 3$.

ⓑ) Vypočítejte bázi $\text{Col}(A)$.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=U}$$

(b) Bázické sloupce matice U jsou **modré**, z čehož lze vyčíst bázické sloupce původní matice A (**červené**). Tedy jednou bází $\text{Col}(A)$ je:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

☉ Vypočítejte bázi $\text{Row}(A)$.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=U}$$

(c) Nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(A)$. Tedy jednou bázi $\text{Row}(A)$ je:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}.$$



Věta 2

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak báze sloupce matice A tvoří bázi $\text{Col}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$.

- Ukážeme nástin důkazu, přičemž použijeme následující tvrzení.

Tvrzení 4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^n$ jsou vektory a $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární matice. Pak platí:

- a) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina $\iff \{B\mathbf{a}_1, \dots, B\mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina;
- b) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n: \mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \iff B\mathbf{v} \in \text{Span}(B\mathbf{a}_1, \dots, B\mathbf{a}_k);$

- Důkaz: Skripta (Penev, Proposition 3.3.3)
 - Jednoduché! Plyn z definicí.

Věta 2

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak **bázické sloupce matice A tvoří bázi $\text{Col}(A)$** . Navíc platí $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$.

Důkaz (nástin). Jelikož je $r := \text{rank}(A)$ rovno počtu bázických sloupců matice A , plyne **druhé** tvrzení z **prvního**.

Zbývá dokázat **první** tvrzení. Položme $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Nechť $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$) jsou bázické sloupce matice A . Je potřeba dokázat, že $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ je báze $\text{Col}(A)$.

Položme $U := \text{RREF}(A)$. Pak $A \sim U$, a tedy (dle Věty 18 z Přednášky č.5) existuje regulární matice $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ t.ž.

$$U = BA = [\ B\mathbf{a}_1 \ \dots \ B\mathbf{a}_m \].$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

Důkaz (nástin, pokračování). Připomenutí: $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$; $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ jsou bázecké sloupce matice A ;
 $\text{RREF}(A) = U = BA = [B\mathbf{a}_1 \ \dots \ B\mathbf{a}_m]$ (B je regulární). Je potřeba dokázat, že $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ je báze $\text{Col}(A)$.

Jelikož $U = \text{RREF}(A)$, platí následující tvrzení:

- (i) $B\mathbf{a}_{i_1}, \dots, B\mathbf{a}_{i_r}$ jsou bázecké sloupce matice U ;
- (ii) $\forall j \in \{1, \dots, r\}: B\mathbf{a}_{i_j} = \mathbf{e}_j^n$;
- (iii) v libovolném sloupci matice U mohou být nenulové pouze horní r složky (všechny ostatní jsou nulové).

Plyne, že $\{\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_r^n\} = \{B\mathbf{a}_{i_1}, \dots, B\mathbf{a}_{i_r}\}$ je báze $\text{Col}(U) = \text{Span}(B\mathbf{a}_1, \dots, B\mathbf{a}_m)$. Nyní z Tvrzení 4 vyplývá, že $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ je báze $\text{Col}(A) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ (details: viz skripta, Penev, Theorem 3.3.4). $\square$

Věta 2

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak bázické sloupce matice A tvoří bázi $\text{Col}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$.

Příklad

Uvažujme následující matici a vektory (s prvky/složky z $\mathbb{Z}_3$):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Vypočítejte bázi $\mathcal{A}$ prostoru $\text{Col}(A)$.
- b) Vypočítejte souřadnicové vektory všech sloupců matice A vzhledem k bázi $\mathcal{A}$.
- c) Určete, zda $\mathbf{b} \in \text{Col}(A)$, a pokud ano, vypočítejte souřadnicový vektor $[\mathbf{b}]_{\mathcal{A}}$.
- d) Určete, zda $\mathbf{c} \in \text{Col}(A)$, a pokud ano, vypočítejte souřadnicový vektor $[\mathbf{c}]_{\mathcal{A}}$.

Řešení. Položme $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$ a uvažujme matici:

$$\begin{aligned} \left[A \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \right] &= \left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Nyní Gaussovou-Jordanovou vypočítáme:

$$\text{RREF}\left(\left[A \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \right]\right) = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

kde jsme **obarvili** bázické sloupce vlevo od svislé tečkované čáry, zatímco horizontální tečkovaná čára je hranicí mezi nenulovými a nulovými řádky matice vlevo od svislé tečkované.

- Protože potřebujeme souřadnicové vektory, je nutné vypočítat RREF. REF nestačí.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 2 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 2 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right],$$

Bázické sloupce vlevo od svislé tečkované čáry tvoří bázi $\text{Col}(A)$, tj.

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

je báze $\text{Col}(A)$. Zároveň platí:

- $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_5$, a tedy $[\mathbf{a}_1]_{\mathcal{A}} = [1 \ 0 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_2 = 0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_5$, a tedy $[\mathbf{a}_2]_{\mathcal{A}} = [0 \ 1 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_3 = 0\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_5$, a tedy $[\mathbf{a}_3]_{\mathcal{A}} = [0 \ 2 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_5$, a tedy $[\mathbf{a}_4]_{\mathcal{A}} = [2 \ 0 \ 0]^T$;
- $\mathbf{a}_5 = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_5$, a tedy $[\mathbf{a}_5]_{\mathcal{A}} = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

Sloupec matice $\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}\right]\right)$, který odpovídá vektoru $\mathbf{b}$ má nenulovou složku pod horizontální tečkovanou čarou, a proto $\mathbf{b} \notin \text{Col}(\mathbf{A})$.

Sloupec matice $\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array}\right]\right)$, který odpovídá vektoru $\mathbf{c}$ má pouze nuly pod horizontální tečkovanou čarou, a proto $\mathbf{c} \in \text{Col}(\mathbf{A})$. Zároveň vidíme, že

$$\mathbf{c} = 1\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_5,$$

a tedy $[\mathbf{c}]_{\mathcal{A}} = [1 \ 1 \ 0]^T$. $\square$

- Nyní se podívejme na nástin důkazu Věty 3.
 - Detaily: skripta (Penev, Theorem 3.3.9).

Věta 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a U je libovolný odstupňovaný tvar matice A .^a Pak nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

^a U může, ale nemusí, být **redukovaným** odstupňovaným tvarem matice A .

Důkaz (nástin). Nejdřív je potřeba dokázat, že platí:

Každé dvě řádkově ekvivalentní matice mají stejný řádkový prostor.

(Důkaz je jednoduchá indukce podle počtu elementárních řádkových úprav, přičemž je potřeba dokázat, že elementární řádkové úpravy zachovávají/nemění řádkový prostor.)

Nyní plyne, že $\text{Row}(A) = \text{Row}(U)$, a zbývá dokázat, že nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(U)$.

Věta 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a U je libovolný odstupňovaný tvar matice A .^a Pak nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

^a U může, ale nemusí, být **redukovaným** odstupňovaným tvarem matice A .

Důkaz (nástin, pokračování). Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ jsou nenulové řádky matice U , v tomto pořadí, jak se v U vyskytují shora dolů.

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \longrightarrow \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Je potřeba dokázat, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ je báze $\text{Row}(U)$. Dle definice platí $\text{Row}(U) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$. Zbývá dokázat, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ je lineárně nezávislá množina.

Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{F}$ jsou t.ž. $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$. Je potřeba dokázat, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.

Důkaz (nástin, pokračování). Připomenutí: $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$; je potřeba dokázat, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.

Předpokládejme ke sporu, že alespoň jeden ze skalárů $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ je nenulový. Nechť $i \in \{1, \dots, r\}$ je nejmenší index t.ž. $\alpha_i \neq 0$. Nyní platí:

- $\alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$;
- $\alpha_i \mathbf{u}_i + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$.

Předpokládejme, že nejlevější nenulová složka řádku i matice U je na pozici j .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} \\
 i \rightarrow \begin{bmatrix}
 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Nyní je j -tá složka řádkového vektoru $\alpha_i \mathbf{u}_i + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r$ nenulová, což je ve sporu se skutečností, že $\alpha_i \mathbf{u}_i + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$. $\square$

Věta 2

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak báze sloupce matice A tvoří bázi $\text{Col}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$.

Věta 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a U je libovolný odstupňovaný tvar matice A .^a Pak nenulové řádky matice U tvoří bázi $\text{Row}(A)$. Navíc platí $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

^a U může, ale nemusí, být **redukovaným** odstupňovaným tvarem matice A .

Důsledek 5

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$;
- Ⓑ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

- Připomenutí:
 - Věta 2: $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A)$;
 - Věta 3: $\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$.

Důsledek 5

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A)$;
- Ⓑ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

Důkaz. Část (a) plyne z Vět 2 a 3. Pro (b) si stačí všimnout, že

$$\text{rank}(A) \stackrel{(a)}{=} \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A^T)) \stackrel{(a)}{=} \text{rank}(A^T).$$



③ Matice plné hodností

- Nyní uvedeme větu a důsledek (bez důkazu).
 - Věta a důsledek v podstatě shrnují různé výsledky (tvrzení/věty/důsledky), které jsme už dokázali.
 - Formální důkaz je v skriptech (Penev, Theorem 3.3.14, Corollary 3.3.15) a v podstatě sestává z odkazů na dříve dokázané výsledky.

Věta 6

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí:

- Ⓐ sloupce matice A jsou lineárně nezávislé $\iff \text{rank}(A) = m$ (tj. A má plnou sloupcovou hodnotu);
- Ⓑ sloupce matice A generují $\mathbb{F}^n$ (tj. $\text{Col}(A) = \mathbb{F}^n$) $\iff \text{rank}(A) = n$ (tj. A má plnou řádkovou hodnotu);
- Ⓒ řádky matice A jsou lineárně nezávislé $\iff \text{rank}(A) = n$ (tj. A má plnou řádkovou hodnotu);
- Ⓓ řádky matice A generují $\mathbb{F}^{1 \times m}$ (tj. $\text{Row}(A) = \mathbb{F}^{1 \times m}$) $\iff \text{rank}(A) = m$ (tj. A má plnou sloupcovou hodnotu).

- Poznámky:

- Části (a-b) jsme už dokázali (v jedné z předchozích přednášek).
- Části (c-d) plynou z (a-b), přičemž (a-b) aplikujeme na matici A^T a zároveň používáme skutečnost, že $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$.

Důsledek 7

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je **čtvercová** matice. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a) $\text{rank}(A) = n$;
- b) $\text{rank}(A^T) = n$;
- c) sloupce matice A jsou lineárně nezávislé;
- d) sloupce matice A generují $\mathbb{F}^n$ (tj. $\text{Col}(A) = \mathbb{F}^n$);
- e) sloupce matice A tvoří bázi $\mathbb{F}^n$;
- f) řádky matice A jsou lineárně nezávislé;
- g) řádky matice A generují $\mathbb{F}^{1 \times n}$ (tj. $\text{Row}(A) = \mathbb{F}^{1 \times n}$);
- h) řádky matice A tvoří bázi $\mathbb{F}^{1 \times n}$.

4 Hodnost maticového součinu. Levá a pravá inverze matice

Tvrzení 8

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ platí $\text{rank}(SA) = \text{rank}(A)$;
- Ⓑ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$, we have that $\text{rank}(AS) = \text{rank}(A)$;
- Ⓒ pro všechny regulární matice $S_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $S_2 \in \mathbb{F}^{m \times m}$ platí $\text{rank}(S_1AS_2) = \text{rank}(A)$.

Důkaz. Dokažme nejprve (a). Nechť $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární matice. Podle Věty 18 z Přednášky č.5 jsou matice A a SA řádkově ekvivalentní, a tedy mají stejnou hodnost. Tím jsme dokázali (a).

Tvrzení 8

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ platí $\text{rank}(SA) = \text{rank}(A)$;
- Ⓑ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$, we have that $\text{rank}(AS) = \text{rank}(A)$;
- Ⓒ pro všechny regulární matice $S_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $S_2 \in \mathbb{F}^{m \times m}$ platí $\text{rank}(S_1AS_2) = \text{rank}(A)$.

Důkaz (pokračování). Dokažme nyní (b). Nechť $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$ je regulární matice. Pak je S^T také regulární (dle Věty o regulárních maticích, v.1). Nyní spočítáme:

$$\begin{aligned} \text{rank}(AS) &= \text{rank}((AS)^T) && \text{podle Důsledku 5(b)} \\ &= \text{rank}(S^T A^T) \\ &= \text{rank}(A^T) && \text{plyne z (a) a regularity } S^T \\ &= \text{rank}(A) && \text{podle Důsledku 5(b).} \end{aligned}$$

Tím je dokázáno (b).

Tvrzení 8

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ platí $\text{rank}(SA) = \text{rank}(A)$;
- Ⓑ pro každou regulární matici $S \in \mathbb{F}^{m \times m}$, we have that $\text{rank}(AS) = \text{rank}(A)$;
- Ⓒ pro všechny regulární matice $S_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $S_2 \in \mathbb{F}^{m \times m}$ platí $\text{rank}(S_1AS_2) = \text{rank}(A)$.

Proof (continued). Zbývá dokázat (c). Nechť $S_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $S_2 \in \mathbb{F}^{m \times m}$ jsou regulární matice. Nyní spočítáme:

$$\text{rank}(S_1AS_2) \stackrel{(a)}{=} \text{rank}(AS_2) \stackrel{(b)}{=} \text{rank}(A),$$

čímž je dokázáno (c). $\square$

Věta 9

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$ jsou matice. Pak platí

$$\text{rank}(AB) \leq \min \{ \text{rank}(A), \text{rank}(B) \}.$$

Důkaz. Položme $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$ a $B = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_p]$. Je potřeba dokázat, že platí $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ a $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.

Nejprve dokážeme, že platí $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$. Dle definice platí $AB = [\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{b}_p]$, a tedy je každý sloupec matice AB lineární kombinací sloupců A , tj. každý sloupec matice AB patří do $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \text{Col}(A)$.

Nyní z Věty 8 z Přednášky č.7 plyne, že

$\text{Col}(AB) = \text{Span}(\mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_p)$ je podprostor $\text{Col}(A)$. Jelikož je prostor $\text{Col}(A)$ konečnědimenzionální, plyne z Věty 4 z Přednášky č.9, že $\text{dim}(\text{Col}(AB)) \leq \text{dim}(\text{Col}(A))$, a tedy

$$\text{rank}(AB) \stackrel{\text{Věta 2}}{=} \text{dim}(\text{Col}(AB)) \leq \text{dim}(\text{Col}(A)) \stackrel{\text{Věta 2}}{=} \text{rank}(A).$$

Věta 9

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$ jsou matice. Pak platí

$$\text{rank}(AB) \leq \min \{ \text{rank}(A), \text{rank}(B) \}.$$

Důkaz (pokračování). Dokázali jsme, že $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$. Analogicky platí $\text{rank}(B^T A^T) \leq \text{rank}(B^T)$, a tedy plyne, že

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= \text{rank}((AB)^T) && \text{podle Důsledku 5(b)} \\ &= \text{rank}(B^T A^T) \\ &\leq \text{rank}(B^T) \\ &= \text{rank}(B) && \text{podle Důsledku 5(b).} \end{aligned}$$



Důsledek 10

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ jsou matice. Pak je matice AB regulární právě tehdy, když jsou matice A a B regulární.

Důkaz. Jsou-li A a B regulární, pak vyplývá z Tvzení 12(d) z Přednášky č.5, že AB je regulární.

Předpokládejme nyní, že AB je regulární, a tedy $\text{rank}(AB) = n$. Je potřeba dokázat, že $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

- Tady používáme skutečnost, že podle Věty o regulárních maticích (v.1) je matice z $\mathbb{F}^{n \times n}$ regulární právě tehdy, když má matice hodnost n .

Podle **Věty 9** platí, že $n = \text{rank}(AB) \leq \min \{ \text{rank}(A), \text{rank}(B) \}$, a tedy platí $\text{rank}(A), \text{rank}(B) \geq n$. Na druhou stranu, jelikož jsou A a B matice typu $n \times n$, víme, že $\text{rank}(A), \text{rank}(B) \leq n$, a tedy $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$. $\square$

Definice

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. *Levou inverzí* matice A rozumíme matici $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ t.ž. $BA = I_m$. *Pravou inverzí* matice A rozumíme matici $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ t.ž. $AC = I_n$.

- Tedy je levou inverzí matice A matice, kterou lze vynásobit A zleva, abychom dostali jednotkovou matici.
- Podobně je pravou inverzí matice A matice, kterou lze vynásobit A zprava, abychom dostali jednotkovou matici.
- Uvažujme např. následující reálné matice:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pak platí $A_1 A_2 = I_2$, a tedy je A_1 levou inverzí matice A_2 , zatímco A_2 je pravou inverzí matice A_1 .

Definice

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. *Levou inverzí* matice A rozumíme matici $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ t.ž. $BA = I_m$. *Pravou inverzí* matice A rozumíme matici $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ t.ž. $AC = I_n$.

- Matice nemusí mít ani levou ani pravou inverzi.
 - Např. nulové matice nemají ani levé ani pravé inverze.
- Na druhou stranu může mít matice více než jednu levou inverzi, nebo více než jednu pravou inverzi.
- Nicméně, jak ukazuje Důsledek 11 (na dalším slajdu), každá matice A , která má levou i pravou inverzi, je ve skutečnosti regulární (a tedy zejména čtvercová), a navíc má A právě jednu levou a jednu pravou inverzi, přičemž jsou tyto matice stejné a rovnají se A^{-1} .

Důsledek 11

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Předpokládejme, že $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je levou inverzí matice A (tj. $BA = I_m$) a $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je pravou inverzí A (tj. $AC = I_n$). Pak je A regulární (a zejména čtvercová, tj. $m = n$), a navíc platí $B = C = A^{-1}$.

Důkaz. Všimněme si nejprve, že

$$m = \text{rank}(I_m) = \underbrace{\text{rank}(BA)}_{=I_m} \stackrel{\text{Věta 9}}{\leq} \min \{ \text{rank}(B), \text{rank}(A) \} \stackrel{(*)}{\leq} n,$$

kde $(*)$ plyne ze skutečnosti, že matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, a tedy $\text{rank}(A), \text{rank}(B) \leq \min \{m, n\} \leq n$.

Jelikož $AC = I_n$, analogicky lze dokázat, že $n \leq m$ (jednoduše namísto $BA = I_m$ použijeme skutečnost, že $AC = I_n$).

Plyne, že $m = n$. Zejména platí, že $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$, a tedy $BA = I_m = I_n$ a $AC = I_n$.

Důsledek 11

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Předpokládejme, že $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je levou inverzí matice A (tj. $BA = I_m$) a $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je pravou inverzí A (tj. $AC = I_n$). Pak je A regulární (a zejména čtvercová, tj. $m = n$), a navíc platí $B = C = A^{-1}$.

Důkaz (pokračování). Připomenutí: $n = m$; $BA = AC = I_n$.

Nyní platí:

$$B = BI_n = B(\underbrace{AC}_{=I_n}) = (\underbrace{BA}_{=I_n})C = I_n C = C.$$

Tedy $AB = BA = I_n$. Dokázali jsme, že A je regulární a že její inverzí je $B = C$. $\square$

Důsledek 11

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Předpokládejme, že $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je levou inverzí matice A (tj. $BA = I_m$) a $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je pravou inverzí A (tj. $AC = I_n$). Pak je A regulární (a zejména čtvercová, tj. $m = n$), a navíc platí $B = C = A^{-1}$.

- Poznámka: Důsledek 11 je důvod, proč jsme regularitu definovali pouze pro čtvercové matice.
 - Každá rozumná definice regulární (invertibilní) matice by vyžadovala existenci jak levé, tak pravé inverze dané matice, a podle Důsledku 11 mohou mít levou i pravou inverzi pouze čtvercové matice.

- Připomenutí:

Věta 9

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$ jsou matice. Pak platí

$$\text{rank}(AB) \leq \min \{ \text{rank}(A), \text{rank}(B) \}.$$

Důsledek 12

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ jsou čtvercové matice, pro které platí $AB = I_n$ **nebo** $BA = I_n$. Pak platí $AB = BA = I_n$, a tedy jsou matice A a B regulární a jsou navzájem inverzní (tj. $B = A^{-1}$ a $A = B^{-1}$).

- Důkaz vynecháváme, ale naleznete ho ve skriptech (Penev, Corollary 3.3.20).
- **Poznámka:** Z Důsledku 12 plyne, že má-li čtvercová matice A levou **nebo** pravou inverzi B , pak je B oboustrannou inverzí matice A , tj. prostě inverzí, a zejména je A regulární.

- 5 Rozšiřování lineárně nezávislé množiny do báze $\mathbb{F}^n$
 - Připomenutí:

Tvrzení 1 z Přednášky č.9

Nechť A je lineárně nezávislá množina v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi B t.ž. $A \subseteq B$.

- Tedy každou lineárně nezávislou množinu v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V lze rozšířit do báze V .
- Pokud $V = \mathbb{F}^n$, takovou bázi lze snadno vypočítat!

Tvrzení 13

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů v $\mathbb{F}^n$. Nechť $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je libovolná báze $\mathbb{F}^n$. Pak bázické sloupce $C := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ tvoří bázi $\mathbb{F}^n$, která rozšiřuje lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech bázických sloupců matice $C = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Je potřeba dokázat, že $\mathcal{C}$ je bází $\mathbb{F}^n$ a zároveň $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{C}$.

Z Věty 2 vyplývá, že $\mathcal{C}$ je bází $\text{Col}(C)$. Nyní si všimněme, že

$$\text{Col}(C) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \supseteq \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \stackrel{(*)}{=} \mathbb{F}^n,$$

kde $(*)$ plyne ze skutečnosti, že $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je báze $\mathbb{F}^n$. Jelikož je $\text{Col}(C)$ podprostor $\mathbb{F}^n$, plyne, že $\text{Col}(C) = \mathbb{F}^n$, a tedy je $\mathcal{C}$ bází $\mathbb{F}^n$.

Zbývá ukázat, že $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{C}$.

Tvrzení 13

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů v $\mathbb{F}^n$. Nechť $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je libovolná baza $\mathbb{F}^n$. Pak bázecké sloupce $C := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ tvoří bázi $\mathbb{F}^n$, která rozšiřuje lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Důkaz (pokračování). Připomenutí: $\mathcal{C}$ je množina všech bázeckých sloupců matice $C = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$; je potřeba ukázat, že $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{C}$.

Všimněme si, že bázecké sloupce matice C vlevo od svislé tečkované čáry jsou právě bázecké sloupce podmatice $[\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k]$. Jelikož jsou vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ lineárně nezávislé, všechny sloupce matice $[\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k]$ jsou bázecké.

- Vskutku, jelikož jsou sloupce matice $[\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k]$ lineárně nezávislé, má tato matice plnou sloupcovou hodnotu, a tedy jsou všechny její sloupce bázecké.

Plyne, že $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{C}$. $\square$

Tvrzení 13

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů v $\mathbb{F}^n$. Nechť $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je libovolná báze $\mathbb{F}^n$. Pak bázecké sloupce $C := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ tvoří bázi $\mathbb{F}^n$, která rozšiřuje lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Tvrzení 14

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^n$ jsou libovolné vektory a $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je libovolná báze $\mathbb{F}^n$. Položme $C := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Pak bázecké sloupce matice C vlevo od svislé tečkované čáry tvoří bázi $\mathcal{A}$ podprostoru $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, zatímco všechny bázecké sloupce matice C tvoří bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathbb{F}^n$, která rozšiřuje $\mathcal{A}$ (tj. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$).

- Důkaz Tvrzení 14 je velmi podobný důkazu Tvrzení 13 a naleznete ho ve skriptech (Penev, Proposition 3.3.23).
- Podívejme se na příklad!

Příklad

Uvažujme následující vektory se složkami v $\mathbb{Z}_3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Vypočítejte bázi $\mathcal{A}$ podprostoru $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. Dále vypočítejte bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^4$, která rozšiřuje $\mathcal{A}$ (tj. pro kterou platí $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$).

Řešení. Uvažujme kanonickou bázi $\mathcal{E}_4 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^4$. Položme

$$\begin{aligned} C &:= \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}(C) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

přičemž jsme obarvili bázecké sloupce. Tedy je

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

bází $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, zatímco je

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bází $\mathbb{Z}_3^4$, která rozšiřuje $\mathcal{A}$. $\square$

6 Jádru matice

Definice

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. *Jádru* matice A , které značíme $\text{Nul}(A)$ nebo $\text{Ker}(A)$, je množina všech řešení homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tj. $\text{Nul}(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

- Poznámka (ang.):
 - $\text{Nul}(A)$ = null space of A
 - $\text{Ker}(A)$ = kernel of A

Tvrzení 15

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak je $\text{Nul}(A)$ podprostor $\mathbb{F}^m$.

- Důkaz: Skripta (Penev, Proposition 3.3.25).
 - Jednoduché! Je prostě potřeba ověřit, že $\text{Nul}(A)$ obsahuje $\mathbf{0}$ a je uzavřeno vzhledem k sčítání a k násobení skalárem.
- Terminologie: *Nulita* matice A je dimenze jejího jádra, tj. $\dim(\text{Nul}(A))$.

Tvrzení 16

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je matice. Pak jsou sloupce matice A lineárně nezávislé právě tehdy, když $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Důkaz. Podle definice je $\text{Nul}(A)$ množinou všech řešení homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a tedy

$$\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\} \iff \text{homogenní rovnice } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ má pouze triviální řešení (tj. řešení } \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

$$\stackrel{(*)}{\iff} \text{sloupce matice } A \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

kde $(*)$ plyne z Tvrzení 1 z Přednášky č.8. $\square$

Příklad

Uvažujme matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

jejíž prvky patří do $\mathbb{Z}_2$. Vypočítejte bázi a dimenzi jádra matice A .^a

^aJádro matice $A = \text{Nul}(A)$.

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Gaussovou-Jordanoou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obecné řešení homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r+t \\ s \\ \boxed{r} \\ \boxed{s} \\ \boxed{t} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } r, s, t \in \mathbb{Z}_2,$$

tj.

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } r, s, t \in \mathbb{Z}_2.$$

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } r, s, t \in \mathbb{Z}_2.$$

Tedy

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix} \right\}$$

je bází $\text{Nul}(A)$, z čehož plyne, že $\dim(\text{Nul}(A)) = 3$. $\square$

- **Poznámka:** Nechť $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice (kde $\mathbb{F}$ je nějaké těleso).

- ① Všimněme si, že $\dim(\text{Nul}(A))$ (tj. počet vektorů v libovolné bázi jádra matice A) vždy bude rovna počtu volných proměnných v obecném řešení homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - Formální důkaz vynecháváme, ale hlavní myšlenku lze pochopit z řešení předchozího příkladu.
- ② Má-li homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pouze triviální řešení (tj. řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), pak platí $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$, a tedy je $\emptyset$ (jedinou) bází $\text{Nul}(A)$.

Věta o hodnotě matice a dimenzi jádra (Rank-nullity theorem)

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice. Pak platí

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = \underbrace{m}_{\substack{= \text{počet} \\ \text{sloupců} \\ \text{matice } A}}.$$

- Formální důkaz vynecháváme, ale hlavní myšlenka je dána v následujícím diagramu:

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{\text{rank}(A)} & + & \underbrace{\dim(\text{Nul}(A))} & = & \underbrace{m} \\ = \text{počet} & & = \text{počet} & & = \text{počet} \\ \text{bázických} & & \text{nebázických} & & \text{sloupců} \\ \text{sloupců} & & \text{sloupců} & & \text{matice } A \\ \text{matice } A & & \text{matice } A & & \\ \\ = \text{počet} & & = \text{počet} & & \\ \text{bázických} & & \text{volných} & & \\ \text{proměnných} & & \text{proměnných} & & \end{array}$$

7 Věta o regulárních maticích (v.2)

Věta o regulárních maticích (v.2)

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je **čtvercová** matice. Nechť je dáno zobrazení $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$.^a Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a) A je regulární (tj. A má inverzní matici);
- b) A^T je regulární;
- c) $\text{RREF}(A) = I_n$;
- d) $\text{RREF}\left(\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}$ pro nějakou matici $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$;
- e) $\text{rank}(A) = n$;
- f) $\text{rank}(A^T) = n$;
- g) A je součin elementárních matic;

^aJelikož je f maticové zobrazení, plyne z Tvrzení 3 z Přednášky č.4, že f je lineární. Navíc je A maticí lineárního zobrazení f v.k.k.b.

Věta o regulárních maticích (v.2) - pokračování

- h) homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$);
- i) existuje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ t.ž. rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení;
- j) pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ má rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení;
- k) pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ má rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nejvíce jedno řešení;
- l) pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ je rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná;
- m) zobrazení f je prosté;
- n) zobrazení f je na;
- o) zobrazení f je isomorfismus.

Věta o regulárních maticích (v.2) - pokračování

- Ⓟ existuje matice $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ t.ž. $BA = I_n$ (tj. má A levou inverzi);
- Ⓠ existuje matice $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ t.ž. $AC = I_n$ (tj. má A pravou inverzi);
- Ⓡ sloupce matice A jsou lineárně nezávislé;
- Ⓢ sloupce matice A generují $\mathbb{F}^n$ (tj. $\text{Col}(A) = \mathbb{F}^n$);
- Ⓣ sloupce matice A tvoří bázi $\mathbb{F}^n$;
- Ⓤ řádky matice A jsou lineárně nezávislé;
- Ⓥ řádky matice A generují $\mathbb{F}^{1 \times n}$ (tj. $\text{Row}(A) = \mathbb{F}^{1 \times n}$);
- Ⓦ řádky matice A tvoří bázi $\mathbb{F}^{1 \times n}$;
- Ⓧ $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ (tj. $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$).

8 Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory (část 1)

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je *lineární* pokud splňuje následující axiomy:

- 1 $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U: f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2);$
- 2 $\forall \mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je *isomorfismus*, pokud je lineární a zároveň bijektivní. Existuje-li isomorfismus mezi U a V , pak říkáme, že U a V jsou *isomorfní*.

Příklad

Uvažujme reální vektorový prostor $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ všech polynomů, jejichž koeficienty jsou reálná čísla. Dokažte, že je zobrazení $D : \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ dané předpisem

$$D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$$

lineární.

- Pokud umíte analýzu, rozpoznáte tady vzorec pro derivaci polynomiálních funkcí.

Řešení. Je potřeba ověřit, že D splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení.

Příklad

Uvažujme reální vektorový prostor $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ všech polynomů, jejichž koeficienty jsou reálná čísla. Dokažte, že je zobrazení $D : \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ dané předpisem

$$D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

lineární.

Řešení (pokračování). 1. Necht' $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$. Pak

$\exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ t.ž.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{a} \quad q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k.$$

- Zde je n nějaké nezáporné celé číslo t.ž.
 $\deg(p(x)), \deg(q(x)) \leq n$. Nerovnost může být i ostrá, tj. je možné, že $a_n = 0$ nebo $b_n = 0$.

Nyní spočítáme (na následujícím slajdu):

- $D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

Řešení (pokračování).

$$\begin{aligned}
 D(p(x) + q(x)) &= D\left(\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k\right)\right) \\
 &= D\left(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k(a_k + b_k) x^{k-1} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=1}^n k b_k x^{k-1}\right) \\
 &= D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) + D\left(\sum_{k=0}^n b_k x^k\right) \\
 &= D(p(x)) + D(q(x)).
 \end{aligned}$$

- $D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

Řešení (pokračování). 2. Necht $p(x) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$\exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ t.ž. $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Nyní spočítáme:

$$\begin{aligned}
 D(\alpha p(x)) &= D\left(\alpha \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)\right) \\
 &= D\left(\sum_{k=0}^n (\alpha a_k) x^k\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n k (\alpha a_k) x^{k-1} \\
 &= \alpha \sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1} \\
 &= \alpha D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) \\
 &= \alpha D(p(x)).
 \end{aligned}$$

Z 1. a 2. plyne, že D je lineární. $\square$

- Ještě jeden příklad pro ty, kteří už umí analýzu.

Příklad

Nechť $\text{Diff}(\mathbb{R})$ je reálný vektorový prostor všech diferencovatelných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, a nechť $\text{Func}(\mathbb{R})$ je reálný vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ověřte, že zobrazení $D : \text{Diff}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Func}(\mathbb{R})$ dané předpisem $D(f) = f' \quad \forall f \in \text{Diff}(\mathbb{R})$ je lineární. (Jako obvykle, f' je derivace funkce f .)

- Řešení: skripta (Penev, Example 4.1.2 - nepovinná četba).

- Následující věta a dva tvrzení jednoduše plynou z definice lineárního zobrazení (důkaz: zkuste sami!).

Věta 17

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak jsou pro každé zobrazení $f : U \rightarrow V$ ekvivalentní následující tvrzení:

- (i) zobrazení f je lineární;
- (ii) $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$:
 $f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}_2).$

Tvrzení 18

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ platí

$$f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2).$$

Tvrzení 19

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak $\forall \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(\mathbf{u}_i),$$

neboli

$$f\left(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k\right) = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k).$$

Tvrzení 20

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ a $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak platí $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.^a

^aPřesněji: $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$, kde $\mathbf{0}_U$ je nulový vektor prostoru U , zatímco je $\mathbf{0}_V$ nulový vektor prostoru V .

Důkaz. Stačí si všimnout, že

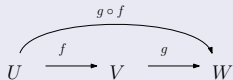
$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) \stackrel{(*)}{=} 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

kde $(*)$ plyne z linearitě f . $\square$

Tvrzení 21

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak platí následující tvrzení:

- a) pro všechna lineární zobrazení $f, g : U \rightarrow V$ je zobrazení $f + g$ lineární;^a
- b) pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a skaláry $\alpha \in \mathbb{F}$ je zobrazení $\alpha f : U \rightarrow V$ lineární;^b
- c) pro všechna lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$ je zobrazení $g \circ f$ lineární.^c



^a $f + g : U \rightarrow V$ je definováno předpisem $(f + g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in U$.

^b $\alpha f : U \rightarrow V$ je definováno předpisem $(\alpha f)(\mathbf{u}) = \alpha(f(\mathbf{u})) \forall \mathbf{u} \in U$.

^c $g \circ f : U \rightarrow W$ je definováno předpisem $(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) \forall \mathbf{u} \in U$.

- Tvrzení 21 jednoduše plyne z definice lineárního zobrazení.
 - Důkaz části (c) je ve skriptech (Penev, Proposition 4.1.7).

- **Poznámka:** Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Množinu všech lineárních zobrazení z U do V značíme $\text{Hom}(U, V)$.
 - **Terminologie:** Lineární zobrazení se občas nazývají „homomorfismy“, a proto se používá značení $\text{Hom}(U, V)$.
 - Všimněme si, že $\text{Hom}(U, V)$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Sčítání vektorů a násobení skalárem v $\text{Hom}(U, V)$ jsou definovány jako sčítání funkcí a násobení funkcí skalárem.
 - Podle Tvrzení 21(a–b) je $\text{Hom}(U, V)$ uzavřeno vzhledem k sčítání funkcí a násobení funkcí skalárem.
 - Nulový vektor prostoru $\text{Hom}(U, V)$ je nulová funkce, tj. funkce $f_0 : U \rightarrow V$ dána předpisem $f_0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V \forall \mathbf{u} \in U$, kde $\mathbf{0}_V$ je nulový vektor prostoru V .