

Lineární algebra 1

Přednáška č.9

Vektorové prostory (část 3)

Irena Penev

3.12.20205

- Tato přednáška má tři části:
 - 1 Vektorové prostory (část 1-2): připomenutí
 - 2 Dimenze vektorových prostorů (pokračování)
 - 3 Dimenze některých (pod)prostorů

1 Vektorové prostory (část 1-2): připomenutí

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Vektor $\mathbf{v} \in V$ je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$, pokud existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k.$$

Lineární obal množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, značený $\text{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\})$ nebo $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, je množina všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, tj.

$$\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}\}.$$

Dohodou je „prázdný součet“ vektorů v V definován jako $\mathbf{0}$ (nulový vektor),^a a tedy $\text{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

^a„Prázdný součet“ je součet tvaru $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, kde $k = 0$ (a tedy nemáme žádné $\mathbf{u}_i$ a žádné α_i).

- **Terminologie:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ *generují* V (nebo množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ *generuje* V), pokud $V = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$.
 - Všimněme si, že $\emptyset$ generuje triviální vektorový prostor $\{\mathbf{0}\}$ nad tělesem $\mathbb{F}$.

Věta 8 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ ($k \geq 0$).^a Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$;
- Ⓑ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor V ;
- Ⓒ pro každý podprostor U vektorového prostoru V t.ž. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, pak $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostor U ;
- Ⓓ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je roven průniku všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

^aPokud $k = 0$, pak je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ prázdná, a platí $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\mathbf{0}\}$.

- **Poznámka:** V některých učebnicích je $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ **definován** jako průnik všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.
 - Dle Věty 8(d) je tato alternativní definice ekvivalentní naší původní definici.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a necht' $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ jsou vektory. Říkáme, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je *lineárně nezávislá*, nebo že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud pro všechny $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Jinými slovy, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud rovnice $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ má pouze „triviální řešení“, tj. řešení $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Na druhou stranu, pokud vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ nejsou lineárně nezávislé, pak říkáme, že jsou *lineárně závislé*, nebo že je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *lineárně závislá*.

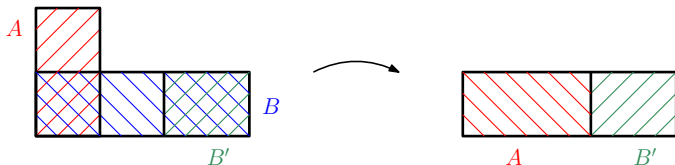
Definice

Konečná báze (nebo jenom *báze*) vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů z V , která splňuje následující dvě podmínky:

- 1 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je lineárně nezávislá ve V ;
- 2 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje V , tj. $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = V$.

Steinitzovo lemma o výměně

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .



- Pomocí Steinitzova lemmatu o výměně jsme dokázali:

Věta 10 z Přednášky č.8

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak všechny báze V mají stejný počet vektorů.

Definice

Dimenze konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, kterou značíme $\dim(V)$, je počet vektorů v libovolné bázi V .

- Pomocí Steinitzova lemmatu o výměně jsme dokázali:

Věta 11 z Přednášky č.8

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $n := \dim(V)$. Pak platí:

- a) každá lineárně nezávislá množina vektorů v V má nejvíce n vektorů;
- b) každá množina vektorů, která generuje V , má alespoň n vektorů.

- Neformálně:

$$|\text{lin. nezávislá množina}| \leq \dim(V) \leq |\text{množina generujících } V|$$

2 Dimenze vektorových prostorů (pokračování)

- Dokázali jsme:

Tvrzení 9 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $B \subseteq V$ je konečná množina, která generuje V . Pak $\exists B' \subseteq B$ t.ž. B' je báze V .

- Nyní dokážeme:

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

- **Pozor:** Tvrzení 1 platí pouze pro **konečnědimenzionální** vektorové prostory.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Důkaz. Položme $n := \dim(V)$. Podle Věty 11 z Přednášky č.8 má každá lineárně nezávislá množina vektorového prostoru V nejvíce n vektorů a zejména $k \leq n$.

Nechť A je lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V , která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ a při této podmínce má co největší mohutnost.

- Vysvětleme, proč A existuje.
- Existuje alespoň jedna lineárně nezávislá množina, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, například $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.
- Na druhou stranu mají všechny lineárně nezávislé množiny mohutnost nejvíce n .
- Tedy A existuje.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Důkaz (pokračování). Připomenutí: A je lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V , která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, a při této podmínce má co největší mohutnost.

Položme $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+l}\}$. Tvrdíme, že A je báze V .

Jelikož je množina A lineárně nezávislá, stačí dokázat, že A generuje V . Nechť $\mathbf{v} \in V$; je třeba dokázat, že $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů z A . Je-li $\mathbf{v} \in A$, je to zřejmé. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{v} \notin A$. Z maximality množiny A plyne, že množina $\{\mathbf{v}\} \cup A$ **není** lineárně nezávislá. Tedy existují skaláry

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l} \in \mathbb{F}$, ne všechny nulové, t.ž.

$$\alpha_0 \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{a}_{k+1} + \alpha_{k+l} \mathbf{a}_{k+l} = \mathbf{0}.$$

Důkaz (pokračování). Připomenutí:

$\alpha_0 \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{a}_{k+1} + \alpha_{k+l} \mathbf{a}_{k+l} = \mathbf{0}$; alespoň jeden ze skalárů $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l}$ je nenulový; je třeba dokázat, že $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+l}$.

Pokud $\alpha_0 = 0$, pak je alespoň jeden ze skalárů

$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l}$ nenulový, a zároveň platí

$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{a}_{k+1} + \alpha_{k+l} \mathbf{a}_{k+l} = \mathbf{0}$, což je spor se skutečností, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+l}$ jsou lineárně nezávislé.

Plyne, že $\alpha_0 \neq 0$, a tedy

$$\mathbf{v} = (-\alpha_0^{-1} \alpha_1) \mathbf{a}_1 + \cdots + (-\alpha_0^{-1} \alpha_{k+l}) \mathbf{a}_{k+l},$$

tj. $\mathbf{v}$ je lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+l}$.

Tím jsme dokázali, že A je báze V . $\square$

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Tvrzení 2

Nechť V je **nekonečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ má V lineárně nezávislou množinu mohutnosti k .

- Uvedeme nástin důkazu. Detaily necháváme jako cvičení.

Tvrzení 2

Nechť V je **nekonečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ má V lineárně nezávislou množinu mohutnosti k .

Důkaz (nástin). Důkaz provedeme indukcí podle k .

Základ indukce: $\emptyset$ je lineárně nezávislá množina mohutnosti 0.

Indukční krok: Nechť $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že V má lineárně nezávislou množinu $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. Kdyby množina A generovala V , pak by A byla báze V , a tedy by vektorový prostor V byl konečnědimenzionální, což je spor. Tedy A negeneruje V , a proto $\exists \mathbf{a}_{k+1} \in V \setminus \text{Span}(A)$. Nyní je jednoduché ověřit (dokažte to sami), že množina $A \cup \{\mathbf{a}_{k+1}\} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá. $\square$

- Připomenutí:

Tvrzení 9 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $B \subseteq V$ je konečná množina, která generuje V . Pak $\exists B' \subseteq B$ t.ž. B' je báze V .

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

- Z těchto dvou tvrzení plyne:

Důsledek 3

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a položme $n := \dim(V)$. Pak platí:

- Ⓐ každá lineárně nezávislá množina mohutnosti n v V je báze V ;
- Ⓑ každá množina mohutnosti n , která generuje V , je báze V .

Tvrzení 1

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v **konečnědimenzionálním** vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak má V bázi, která obsahuje vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Důsledek 3

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a položme $n := \dim(V)$. Pak platí:

- Ⓐ každá lineárně nezávislá množina mohutnosti n v V je báze V ;
- Ⓑ každá množina mohutnosti n , která generuje V , je báze V .

Důkaz. (a) Nechť A je libovolná lineárně nezávislá množina vektorů z V t.ž. $|A| = n$. Podle Tvrzení 1 má V bázi A' t.ž. $A \subseteq A'$. Jelikož $\dim(V) = n$, plyne, že $|A'| = n$. Jelikož $|A| = |A'| = n$ a $A \subseteq A'$, plyne, že $A = A'$. Tedy A je báze V (protože A' je báze V). Tím je dokázáno (a). $\square$

Tvrzení 9 z Přednášky č.8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $B \subseteq V$ je konečná množina, která generuje V . Pak $\exists B' \subseteq B$ t.ž. B' je báze V .

Důsledek 3

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a položme $n := \dim(V)$. Pak platí:

- Ⓐ každá lineárně nezávislá množina mohutnosti n v V je báze V ;
- Ⓑ každá množina mohutnosti n , která generuje V , je báze V .

Důkaz. (b) Nechť B je množina mohutnosti n , která generuje V . Podle Tvrzení 9 z Přednášky č.8 má V bázi B' t.ž. $B' \subseteq B$. Jelikož $\dim(V) = n$, plyne, že $|B'| = n$. Jelikož $|B| = |B'| = n$ a $B' \subseteq B$, plyne, že $B' = B$. Tedy B je báze V (protože B' je báze V). Tím je dokázáno (b). $\square$

Věta 4

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a U je podprostor V . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ U je konečnědimenzionální;
- Ⓑ $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓒ $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$.

Důkaz. Položme $n := \dim(V)$. Jelikož je U podprostor V , každá lineárně nezávislá množina v U je zároveň lineárně nezávislá ve V a tedy dle Věty 11(a) z Přednášky č.8 každá taková množina má nejvíce n vektorů. Nechť $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je lineárně nezávislá množina v U o co největší mohutnosti. (Tedy $k \leq n$.) Je třeba dokázat, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze U ; z toho budou plynout (a) a (b). Jelikož je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ lineárně nezávislá, stačí dokázat, že tato množina generuje U .

Důkaz (pokračování). Připomenutí: $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je lineárně nezávislá množina o co největší mohutnosti. Je třeba dokázat, že tato množina generuje U .

Nechť $\mathbf{u} \in U$; je třeba dokázat, že $\mathbf{u}$ je lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Můžeme předpokládat, že $\mathbf{u} \notin \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, protože jinak máme hotovo.

Z maximality $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ plyne, že množina $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je lineárně závislá. Tedy existují skaláry $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, z nichž je alespoň jeden nenulový, t.ž.

$$\alpha_0 \mathbf{u} + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Pokud $\alpha_0 = 0$, pak platí $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ a alespoň jeden ze skalárů $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ je nenulový, což je spor se skutečností, že množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je lineárně nezávislá.

Tedy $\alpha_0 \neq 0$ a plyne, že

$$\mathbf{u} = (-\alpha_0^{-1} \alpha_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (-\alpha_0^{-1} \alpha_k) \mathbf{u}_k.$$

Tedy $\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, a plyne, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ generuje U .

Věta 4

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a U je podprostor V . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ U je konečnědimenzionální;
- Ⓑ $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓒ $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$.

Důkaz (pokračování). Dokázali jsme, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze U , a tedy platí (a) a (b).

Zbývá dokázat (c). Předpokládejme, že $\dim(U) = \dim(V)$, tj. $k = n$.

Nyní je $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ lineárně nezávislá množina mohutnosti n ve n -dimenzionálním vektorovém prostoru V a tedy z Důsledku 3(a) plyne, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze V . Tedy $U = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = V$, čímž jsme dokázali (c). $\square$

Věta 4

Nechť V je **konečnědimenzionální** vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a U je podprostor V . Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ U je konečnědimenzionální;
- Ⓑ $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- Ⓒ $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$.

- **Pozor:** Věta 4 platí pouze pro **konečnědimenzionální** vektorové prostory!
 - Nekonečnědimenzionální vektorové prostory mohou mít nekonečnědimenzionální vlastní podprostory.
 - Např. $\{p(x) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \mid p(0) = 0\}$ je nekonečnědimenzionální vlastní podprostor vektorového prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$.

- Geometrická interpretace podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$:
 - Jediný 0-dimenzionální podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ je $\{\mathbf{0}\}$.
 - 1-dimenzionální podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou přímky („kopie $\mathbb{R}^1$ “), které procházejí počátkem.
 - 2-dimenzionální podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou roviny („kopie $\mathbb{R}^2$ “), které procházejí počátkem.
 - m -dimenzionální podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) jsou „kopie $\mathbb{R}^m$ “, které procházejí počátkem.
 - Jediný n -dimenzionální podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ je $\mathbb{R}^n$ samo.

3 Dimenze některých (pod)prostorů

- **Připomenutí:** Jsou-li U a W vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$, pak je $U \times W$ také vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, přičemž sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem definujeme takto:
 - $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) := (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$
 $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W;$
 - $\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := (\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{w}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W.$

Tvrzení 5

Nechť U a W jsou konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak je vektorový prostor $U \times W$ také konečnědimenzionální, a navíc platí

$$\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Tvrzení 5

Nechť U a W jsou konečnědimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak je vektorový prostor $U \times W$ také konečnědimenzionální, a navíc platí

$$\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Důkaz (nástin). Položme $m := \dim(U)$ a $n := \dim(W)$. Nechť $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ a $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ jsou báze U a W respektive. Pak jednoduše lze ověřit (důkaz: zkuste sami), že

$$\{(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}_W), \dots, (\mathbf{u}_m, \mathbf{0}_W), (\mathbf{0}_U, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{0}_U, \mathbf{w}_n)\}$$

je báze prostoru $U \times W$, a tedy $\dim(U \times W) = m + n = \dim(U) + \dim(W)$. $\square$.

- **Připomenutí:** Jsou-li U a W podprostory vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, pak jsou $U \cap W$ a $U + W := \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$ také podprostory V .

Věta 6

Nechť U a W jsou podprostory konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak jsou $U \cap W$ a $U + W$ také podprostory prostoru V . Navíc jsou podprostory U , W , $U \cap W$ a $U + W$ konečnědimenzionální a splňují

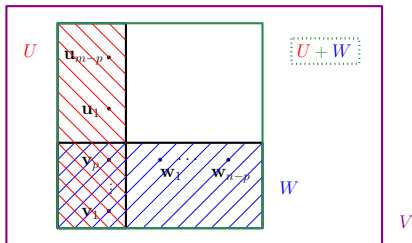
$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Důkaz. Jelikož je vektorový prostor V konečnědimenzionální, z Věty 4(a) vyplývá, že jeho podprostory U , W , $U \cap W$ a $U + W$ jsou také konečnědimenzionální.

Věta 6

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

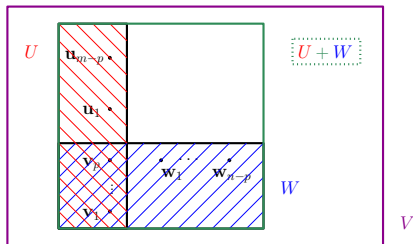
Důkaz. Položme $m := \dim(U)$, $n := \dim(W)$ a $p := \dim(U \cap W)$.
 Nechť $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ je báze podprostoru $U \cap W$. Pak je
 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ lineárně nezávislá množina v konečnědimenzionálním
 vektorovém prostoru U , a tedy ji lze dle Tvzení 1 rozšířit do báze
 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}\}$ podprostoru U . Podobně lze
 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ rozšířit do báze $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}\}$
 podprostoru W .



Věta 6

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Důkaz.

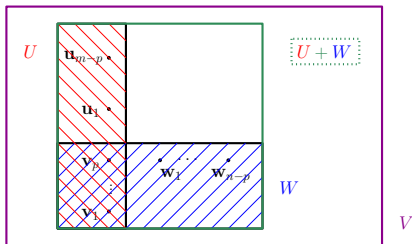


Nyní stačí dokázat, že

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}\}$$

je báze $U + W$, protože z toho hned bude plynout, že

$$\begin{aligned} \dim(U + W) + \dim(U \cap W) &= \left(p + (m - p) + (n - p) \right) + p \\ &= m + n \\ &= \dim(U) + \dim(W). \end{aligned}$$



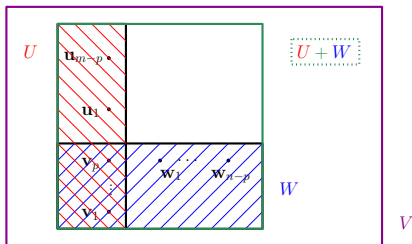
Důkaz (pokračování). Je jednoduché dokázat, že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}$ generují $U + W$. Dokažme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{m-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-p} \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0}.$$

Je třeba dokázat, že

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{m-p} = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-p} = 0.$$



Důkaz (pokračování). Připomenutí:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0}.$$

Všimněme si, že

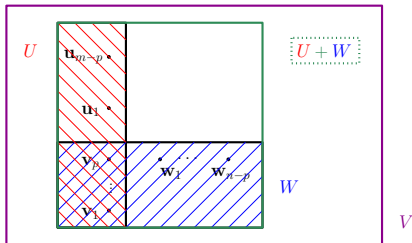
$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} = -\alpha_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_p \mathbf{v}_p - \gamma_1 \mathbf{w}_1 - \cdots - \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p},$$

a tedy $\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}) \subseteq W$.

Na druhou stranu platí

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}) \subseteq U, \text{ a tedy}$$

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} \in U \cap W.$$



Důkaz (pokračování). Připomenutí:

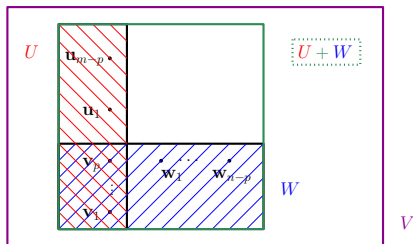
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0};$$

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} \in U \cap W.$$

Jelikož je $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ báze $U \cap W$, plyne, že $\exists \delta_1, \dots, \delta_p \in \mathbb{F}$ t.ž.
 $\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} = \delta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \delta_p \mathbf{v}_p$, a tedy

$$-\delta_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - \delta_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} = \mathbf{0}.$$

Jelikož jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}$ lineárně nezávislé (protože tvoří bázi podprostoru U), plyne, že
 $-\delta_1 = \cdots = -\delta_p = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-p} = 0$.



Důkaz (pokračování). Připomenutí:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0};$$

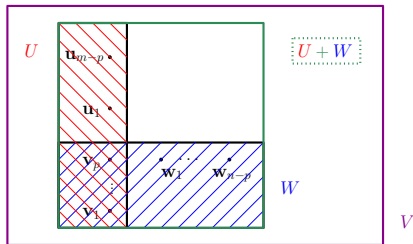
$$\beta_1 = \cdots = \beta_{m-p} = 0.$$

Plyne, že

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0}.$$

Jelikož jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}$ lineárně nezávislé (protože tvoří bázi podprostoru W), plyne, že

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-p} = 0.$$



Důkaz (pokračování). Připomenutí:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{m-p} \mathbf{u}_{m-p} + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_{n-p} \mathbf{w}_{n-p} = \mathbf{0}.$$

Dokázali jsme, že

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-p} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-p} = 0$, a tedy jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-p}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-p}$ lineárně nezávislé. $\square$

Věta 6

Nechť U a W jsou podprostory konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak jsou $U \cap W$ a $U + W$ také podprostory prostoru V . Navíc jsou podprostory U , W , $U \cap W$ a $U + W$ konečnědimenzionální a splňují

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

- Jsou-li U a W podprostory vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ t.ž. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ a $V = U + W$, pak říkáme, že V je *přímý součet* U a W , což značíme $V = U \oplus W$.
 - Pokud je $V = U \oplus W$ konečnědimenzionální, plyne z Věty 6, že $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.
 - Vskutku, $\dim(U \cap W) = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(U \oplus W) + 0 \\ &= \dim(U + W) + \dim(U \cap W) \\ &\stackrel{\text{Věta 6}}{=} \dim(U) + \dim(W). \end{aligned}$$

- Navíc máme následující větu (na následujícím slajdu).

Věta 7

Nechť U a W podprostory vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ t.ž. $V = U \oplus W$. Pak $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ t.ž. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

- Důkaz: zkuste sami! (Jednoduché.)