

Lineární algebra 1

Přednáška č.8

Vektorové prostory (část 2)

Irena Penev

26.11.20205

- Tato přednáška má dvě části:
 - 1 Vektorové prostory (část 1): připomenutí
 - 2 Některé vektorové (pod) podprostory
 - 3 Lineárně nezávislé množiny a báze vektorových prostorů
 - 4 Steinitzovo lemma o výměně a dimenze vektorového prostoru

① Vektorové prostory (část 1): připomenutí

Definice

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso (jehož prvky budeme nazývat *skaláry*), s neutrálními prvky 0 pro sčítání a 1 pro násobení. *Vektorový prostor* nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina V (jejíž prvky budeme nazývat *vektory*) s operacemi sčítání vektorů $+: V \times V \rightarrow V$ a násobení vektoru skalárem $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$, splňující následující axiomy:

- ① $(V, +)$ je Abelova grupa; neutrální prvek grupy $(V, +)$ značíme $\mathbf{0}$ („nulový vektor“), zatímco inverzní prvek k vektoru $\mathbf{v} \in V$ v grupě $(V, +)$ značíme $-\mathbf{v}$ („opačný prvek k vektoru $\mathbf{v}$ “);
- ② $\forall \mathbf{v} \in V: 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$;
- ③ $\forall \mathbf{v} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}: (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$;
- ④ $\forall \mathbf{v} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}: (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;
- ⑤ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

Tvrzení 5 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak platí následující tvrzení:

- a) $\forall \mathbf{v} \in V: 0\mathbf{v} = \mathbf{0};^a$
- b) $\forall \alpha \in \mathbb{F}: \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0};$
- c) $\forall \mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (\alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0});$
- d) $\forall \mathbf{v} \in V: (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.^b$

^aTady je 0 neutrální prvek pro sčítání v tělese $\mathbb{F}$, zatímco $\mathbf{0}$ je nulový vektor ve vektorovém prostoru V .

^bTady je -1 opačný prvek k neutrálnímu prvku pro násobení v tělese $\mathbb{F}$, a zejména je -1 skalár. Tedy $(-1)\mathbf{v}$ je součin skaláru -1 a vektoru $\mathbf{v}$. Na druhou stranu $-\mathbf{v}$ je opačný prvek k vektoru $\mathbf{v}$.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. *Vektorový podprostor* (nebo prostě *podprostor*) vektorového prostoru V je podmnožina $U \subseteq V$ t.ž. samotné U je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, s operacemi „převzatými“ z V .^a

^aVšimněme si, že musíme mít stejné těleso $\mathbb{F}$ pro U a V !

Věta 6 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $U \subseteq V$. Pak je U podprostorem V právě tehdy, když platí:

- i) $\mathbf{0} \in U$;^a
- ii) množina U je uzavřena vzhledem k sčítání, tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$:
 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$;
- iii) množina U je uzavřena vzhledem k násobení skalárem, tj.
 $\forall \mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha \mathbf{u} \in U$.

^aTady je $\mathbf{0}$ nulový vektor vektorového prostoru V .

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Vektor $\mathbf{v} \in V$ je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$, pokud existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k.$$

Lineární obal množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, značený $\text{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\})$ nebo $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, je množina všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, tj.

$$\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}\}.$$

Dohodou je „prázdný součet“ vektorů v V definován jako $\mathbf{0}$ (nulový vektor),^a a tedy $\text{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

^a„Prázdný součet“ je součet tvaru $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, kde $k = 0$ (a tedy nemáme žádné $\mathbf{u}_i$ a žádné α_i).

- **Terminologie:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ *generují* V (nebo množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ *generuje* V), pokud $V = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$.
 - Všimněme si, že $\emptyset$ generuje triviální vektorový prostor $\{\mathbf{0}\}$ nad tělesem $\mathbb{F}$.

Věta 8 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ ($k \geq 0$).^a Pak platí následující tvrzení:

- Ⓐ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$;
- Ⓑ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostorem V ;
- Ⓒ pro každý podprostor U vektorového prostoru V t.ž. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, pak $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je podprostorem U ;
- Ⓓ $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je roven průniku všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

^aPokud $k = 0$, pak je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ prázdná, a platí $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \{\mathbf{0}\}$.

- **Poznámka:** V některých učebnicích je $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ **definován** jako průnik všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.
 - Dle Věty 8(d) je tato alternativní definice ekvivalentní naší původní definici.

2 Některé vektorové (pod)prostory

- Nyní zkusme sestavit nové vektorové prostory z těch, které už máme.
- Předpokládejme, že jsou dány vektorové prostory U a W nad tělesem $\mathbb{F}$.
- Pak lze **kartézský součin**

$$U \times W := \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

přirozeným způsobem vybavit strukturou vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$.

- Sčítání vektorů je definováno předpisem

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) := (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2),$$

pro všechny $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$.

- Násobení skalárem v $U \times W$ (pro skaláry z $\mathbb{F}$) je definováno předpisem

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := (\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{w})$$

pro všechny $\alpha \in \mathbb{F}$, $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{w} \in W$.

- Nulový vektor ve $U \times W$ je vektor

$$\mathbf{0}_{U \times W} := (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_W),$$

kde $\mathbf{0}_U$ a $\mathbf{0}_W$ jsou neutrální prvky pro sčítání v U a W respektive.

- Opačný vektor k vektoru $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ z $U \times W$ je vektor

$$(-\mathbf{u}, -\mathbf{w}),$$

kde $-\mathbf{u}$ (resp. $-\mathbf{w}$) je opačný prvek k $\mathbf{u}$ (resp. $\mathbf{w}$) ve vektorovém prostoru U (resp. W).

- Nyní lze jednoduše ověřit, že pro $U \times W$ platí všechny axiomy z definice vektorového prostoru.
 - Prostě využijeme toho, že axiomy platí pro U a W .

- Necht U a W jsou podprostory vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$.
- Pomocí Věty 6 lze jednoduše ověřit, že $U \cap W$ a

$$U + W := \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

jsou podprostory vektorového prostoru V .

- Detaily ponecháváme jako cvičení.

3 Lineárně nezávislé množiny a báze vektorových prostorů

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a necht' $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ jsou vektory. Říkáme, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je *lineárně nezávislá*, nebo že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud pro všechny $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Jinými slovy, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud rovnice $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ má pouze „triviální řešení“, tj. řešení $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Na druhou stranu, pokud vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ nejsou lineárně nezávislé, pak říkáme, že jsou *lineárně závislé*, nebo že je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *lineárně závislá*.

- Jinými slovy, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, **alespoň jeden nenulový**, t.ž. $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.
- **Poznámka:** $\emptyset$ je lineárně nezávislá množina ve **každém** vektorovém prostoru.

- Pro speciální případ vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ (kde $\mathbb{F}$ je těleso), máme následující tvrzení.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, a necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 1$) jsou vektory v $\mathbb{F}^n$. Položme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou lineárně nezávislé;
- Ⓑ homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$);
- Ⓒ $\text{rank}(A) = m$ (tj. A má plnou sloupcovou hodnot).

Důkaz. Dle Důsledku 8 z Přednášky č.3 jsou (b) a (c) ekvivalentní.

Zbývá ukázat, že (a) a (b) jsou ekvivalentní. Máme následující posloupnost ekvivalentních tvrzení (následující slajd):

Důkaz (pokračování).

vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou lineárně nezávislé
(a)

$\iff$ rovnice $x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $x_1 = \dots = x_m = 0$)

$\iff$ rovnice $\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $x_1 = \dots = x_m = 0$)

$\iff$ homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
(b)

Tím jsme dokázali, že (a) a (b) jsou ekvivalentní. $\square$

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso, a nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 1$) jsou vektory v $\mathbb{F}^n$. Položme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou lineárně nezávislé;
- Ⓑ homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení (tj. řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$);
- Ⓒ $\text{rank}(A) = m$ (tj. A má plnou sloupcovou hodnotu).

Tvrzení 2

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ a nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Pak je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ lineárně nezávislá právě tehdy, když je množina $\{\alpha_1\mathbf{v}_1, \dots, \alpha_k\mathbf{v}_k\}$ lineárně nezávislá.

Důkaz. Vyplývá z definice lineární nezávislosti (detaily: zkuste sami). $\square$

Definice

Konečná báze (nebo jenom *báze*) vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů z V , která splňuje následující dvě podmínky:

- 1 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je lineárně nezávislá ve V ;
- 2 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje V , tj. $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = V$.

Příklad

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Pak je kanonická báze $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_n^n\}$ opravdu (tj. ve smyslu definice) bází $\mathbb{F}^n$.

Příklad

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Pak je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bází $\mathbb{F}^{3 \times 2}$.

Příklad

Uvažujme triviální vektorový prostor $\{\mathbf{0}\}$ nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak je $\emptyset$ bází $\{\mathbf{0}\}$.

Definice

Konečná báze (nebo jenom *báze*) vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů z V , která splňuje následující dvě podmínky:

- 1 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je lineárně nezávislá ve V ;
- 2 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje V , tj. $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = V$.

Definice

Vektorový prostor je *konečnědimenzionální* (nebo je *konečně generovaný*, nebo má *konečnou dimenzi*), má-li konečnou bázi. Vektorový prostor, který žádnou konečnou bázi nemá, je *nekonečnědimenzionální* (nebo je *nekonečně generovaný*, nebo má *nekonečnou dimenzi*).

- **Značení:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Je-li V konečnědimenzionální, značíme to $\dim(V) < \infty$.
 - Je-li V nekonečnědimenzionální, značíme to $\dim(V) = \infty$.

Tvrzení 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Pak je $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ nekonečnědimenzionální. Na druhou stranu, pro každé celé číslo $n \geq 0$, $\{1, x, \dots, x^n\}$ je báze $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$, a tedy je $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ konečnědimenzionální.

Důkaz (nástin). Je „zřejmé“ že $\{1, x, \dots, x^n\}$ je báze $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ (pro každé celé číslo $n \geq 0$).

Zbývá dokázat, že $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ je nekonečnědimenzionální. Stačí ukázat, že žádná konečná množina polynomů v $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ negeneruje $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ (a tedy $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ nemá konečnou bázi).

Nechť $\mathcal{P} = \{p_1(x), \dots, p_k(x)\}$ je libovolná konečná množina polynomů v $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$. Pak existuje $d \in \mathbb{N}$ t.ž.

$\deg(p_1(x)), \dots, \deg(p_k(x)) \leq d$, a tedy $x^{d+1} \notin \text{Span}(\mathcal{P})$.

Plyne, že žádná konečná množina polynomů v $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ negeneruje $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$, a tedy $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ nemá konečnou bázi. $\square$

Tvrzení 3

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Pak je $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ nekonečnědimenzionální. Na druhou stranu, pro každé celé číslo $n \geq 0$, $\{1, x, \dots, x^n\}$ je báze $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$, a tedy je $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ konečnědimenzionální.

- Dle Tvrzení 3 vsutku existují vektorové prostory, které nemají konečnou bázi (a tedy jsou nekonečnědimenzionální).
- Lze také definovat nekonečnou bázi, ale je to technicky náročnější a definici zde neuvádíme.
 - Pro stručnou diskusi viz skripta (Penev, oddíl 3.2.7 - nepovinná četba).

- Pro speciální případ vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ (kde $\mathbb{F}$ je těleso), máme následující tvrzení.

Tvrzení 4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 1$) jsou vektory z $\mathbb{F}^n$. Položme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak je $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ báze $\mathbb{F}^n$ právě tehdy, když $\text{rank}(A) = n = m$ (tj. když A je čtvercová matice plné hodnosti). Zejména každá báze vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ obsahuje právě n vektorů.

Důkaz. Dle Tvrzení 10 jsou vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ **lineárně nezávislé** právě tehdy, když **$\text{rank}(A) = m$** .

Dle Tvrzení 7 vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ **generují $\mathbb{F}^n$** právě tehdy, když **$\text{rank}(A) = n$** .

Tedy je $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ báze $\mathbb{F}^n$ právě tehdy, když $\text{rank}(A) = \mathbf{m} = \mathbf{n}$. $\square$

Tvrzení 4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso a nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \geq 1$) jsou vektory z $\mathbb{F}^n$. Položme $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Pak je $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ báze $\mathbb{F}^n$ právě tehdy, když $\text{rank}(A) = n = m$ (tj. když A je čtvercová matice plné hodnosti). Zejména každá báze vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ obsahuje právě n vektorů.

- **Poznámka:** Nechť $\mathbb{F}$ je těleso.
 - Dle Věty o regulárních maticích jsou čtvercové matice plné hodnosti právě regulární matice.
 - Tedy Tvrzení 4 dává další kritérium regularity: matice v $\mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když její sloupce tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$.
 - Dle Tvrzení 4 každá báze $\mathbb{F}^n$ obsahuje právě n vektorů.
 - Později uvidíme, že je-li V **libovolný** konečnědimenzionální vektorový prostor, pak mají **všechny** báze prostoru V stejný počet vektorů.
 - Abychom to dokázali, musíme rozvinout další teorii!

- Připomenutí:

Tvrzení 9 z Přednášky č.7

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Pak platí

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \text{Span}(\alpha_1 \mathbf{v}_1, \dots, \alpha_k \mathbf{v}_k).$$

Tvrzení 2

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ a nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Pak je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ lineárně nezávislá právě tehdy, když je množina $\{\alpha_1 \mathbf{v}_1, \dots, \alpha_k \mathbf{v}_k\}$ lineárně nezávislá.

Tvrzení 5

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ a nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Pak je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ bází V právě tehdy, když je množina $\{\alpha_1 \mathbf{v}_1, \dots, \alpha_k \mathbf{v}_k\}$ bází V .

Důkaz. Vynechán. (Zkuste sami!)

- Naše následující věta říká, že konečná množina vektorů je bází vektorového prostoru V právě tehdy, když **každý** vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů **právě jedním** způsobem.

Věta 6

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a necht' $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je bází V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že platí (i); je třeba ukázat, že platí (ii).
Nechť $\mathbf{v} \in V$. Musíme dokázat, že existují jediné skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

Jelikož je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bází V , a tedy generuje V , víme, že každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Tím je dokázána existence.

Věta 6

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

Důkaz (pokračování). Zbývá ukázat jedinečnost. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$ jsou skaláry t.ž.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n.$$

Tedy platí $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$, z čehož plyne, že

$$(\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Jelikož je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineárně nezávislá (protože je báze V), plyne, že $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Tedy $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Tím je dokázána jedinečnost, a tedy i (ii).

Věta 6

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

Důkaz (pokračování). Předpokládejme nyní, že platí (ii); musíme ukázat, že platí (i).

Dle (ii) je každý vektor z V lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, a tedy množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ generuje V .

Zbývá ukázat, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je lineárně nezávislá. Je zřejmé, že rovnice $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ má řešení, a to $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$; dle (ii) je toto řešení **jediné**, a tedy plyne, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je lineárně nezávislá. Tím jsme dokázali (i). $\square$

Definice

Konečná báze (nebo jenom *báze*) vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů z V , která splňuje následující dvě podmínky:

- 1 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je lineárně nezávislá ve V ;
- 2 množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje V , tj. $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = V$.

Věta 6

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, a nechtě $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V ;
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$.

- **Poznámka/Značení:** Věta 6 je jedním z hlavních důvodů, proč nás zajímají báze.
 - Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ($n \geq 1$) je báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Pak podle Věty 6 můžeme každému vektoru $\mathbf{v} \in V$ přiřadit jednoznačný vektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

v $\mathbb{F}^n$ takový, že $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n$; vektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ se nazývá *souřadnicový vektor* vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

- Tedy je V v určitém smyslu „ekvivalentní“ s $\mathbb{F}^n$.
 - Technický termín je „isomorfní“: V je isomorfní s $\mathbb{F}^n$.
 - Formálněji to probereme později (za několik týdnů).

Příklad

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso.

- a) Uvažujme kanonickou bázi $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$. Pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ platí $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} = \mathbf{x}$.^a
- b) Uvažujme bázi $\mathcal{B} := \{1, x, \dots, x^n\}$ vektorového prostoru $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$. Pak pro každé $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^n$ (kde $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{F}$), platí $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T$.

^aVskutku, pro každý vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ platí $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$, a tedy $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T = \mathbf{x}$.

- **Poznámka:** Když pracujeme se souřadnicovými vektory, vždycky musíme **specifikovat bázi**, vzhledem k níž ty souřadnicové vektory počítáme.
 - Souřadnicové vektory stejného vektoru, ale vzhledem k různým bázím, mohou být různé.

Tvrzení 7

Nechť $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ($n \geq 1$) je báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i^n$.

Důkaz. Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak platí

$$\mathbf{b}_i = 0\mathbf{b}_1 + \dots + 0\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{1}\mathbf{b}_i + 0\mathbf{b}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{b}_n$$

a tedy

$$[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-tá složka}$$

tj. $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i^n$. $\square$

- **Poznámky:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Striktně vzato, (konečná) báze není množina, ale (uspořádaná) posloupnost vektorů, ačkoli se často používají složené závorky („{ }“).
 - Tedy kvůli rozdílnému pořadí následující báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ **nejsou** stejné:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Obě množiny (přesněji: uspořádané posloupnosti) jsou báze $\mathbb{R}^3$, protože čtvercové matice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mají plnou hodnot (tj. $\text{rank} = 3$).
- Pořadí je důležité právě kvůli souřadnicovým vektorům.

- **Poznámky:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - V kontextu lineárně (ne)závislých množin a množin generujících vektorové (pod)prostory také budeme předpokládat, že naše množiny jsou ve skutečnosti uspořádané posloupnosti vektorů.
 - Žádná lineárně nezávislá množina (a tedy žádná báze) neobsahuje více než jednu kopii stejného vektoru.
 - Vskutku, je-li $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ posloupnost vektorů, která obsahuje více kopií stejného vektoru, např. $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ pro nějaké $i \neq j$, pak pro
 - $\alpha_i := 1$,
 - $\alpha_j = -1$,
 - $\alpha_k = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$,
 platí $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, tedy vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nejsou lineárně nezávislé, neboli množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ není lineárně nezávislá.

- **Poznámky:** Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.
 - Je zřejmé, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá.
 - Množina $\{\mathbf{0}\}$ je lineárně závislá, protože $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
 - Tedy každá množina, která obsahuje $\mathbf{0}$, je lineárně závislá.

Tvrzení 8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Pak platí:

- Ⓐ vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když neexistuje $i \in \{1, \dots, k\}$ t.ž. $\mathbf{a}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$;
- Ⓑ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: je-li $\mathbf{a}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$, pak platí $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$.

- Dokážeme (b). Zkuste dokázat (a) sami nebo se podívejte do skript (Penev - Proposition 3.2.11).

Tvrzení 8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Pak platí:

- ⓑ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: je-li $\mathbf{a}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$, pak platí
 $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{a}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k.$$

Je zřejmé, že $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \supseteq \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$.
Je třeba dokázat, že

$\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \subseteq \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$. Necht'

$\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Je třeba dokázat, že

$\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$, tj. že $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$.

Tvrzení 8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Pak platí:

- ⓑ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: je-li $\mathbf{a}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$, pak platí $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Důkaz (pokračování). Jelikož $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, existují skaláry $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{F}$ t.ž. $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{a}_k$. Pak platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \beta_i \mathbf{a}_i + \beta_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \beta_k \mathbf{a}_k \\ &= \beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \\ &\quad + \beta_i (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k) \\ &\quad + \beta_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \beta_k \mathbf{a}_k \\ &= (\beta_1 + \beta_i \alpha_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (\beta_{i-1} + \beta_i \alpha_{i-1}) \mathbf{a}_{i-1} + \\ &\quad + (\beta_{i+1} + \beta_i \alpha_{i+1}) \mathbf{a}_{i+1} + \dots + (\beta_k + \beta_i \alpha_k) \mathbf{a}_k, \end{aligned}$$

tj. $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$. $\square$

Tvrzení 8

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Pak platí:

- Ⓐ vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když neexistuje $i \in \{1, \dots, k\}$ t.ž. $\mathbf{a}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$;
- Ⓑ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$: je-li $\mathbf{a}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$, pak platí $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Tvrzení 9

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $B \subseteq V$ je konečná množina, která generuje V . Pak $\exists B' \subseteq B$ t.ž. B' je báze V .

Důkaz. Necht' $B' = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ je množina vektorů t.ž.

- $B' \subseteq B$;
- $\text{Span}(B') = V$;
- při výše uvedených podmínkách má B' minimální možnou mohutnost (kardinalitu).

(Existence B' plyne ze skutečnosti, že $B \subseteq B$ a $\text{Span}(B) = V$.)

Tvrdíme, že B' je báze V . Stačí dokázat, že množina B' je lineárně nezávislá. Předpokládejme pro spor, že B' je lineárně závislá. Pak podle Tvrzení 8(a) $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ t.ž. $\mathbf{b}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_k$. Nyní z Tvrzení 8(b) plyne, že $\text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{Span}(B') = V$, což je v rozporu s minimalitou B' . $\square$

- 4 Steinitzovo lemma o výměně a dimenze vektorového prostoru
- Pro daný konečnědimenzionální vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{F}$ budeme chtít prozkoumat vztah mezi mohutnostmi (kardinalitami):

- lineárně nezávislých množin vektorů ve V ,
- množin vektorů generujících V ,
- bází V .

- Konkrétně dokážeme, že:

- všechny báze V mají stejný počet vektorů, přičemž ten počet vektorů nazveme „dimenzí V “, což značíme $\dim(V)$;
- platí (neformálně):

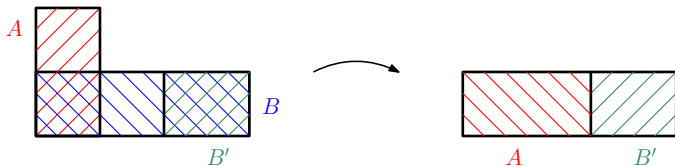
$$|\text{lin. nezávislá množina}| \leq \dim(V) \leq |\text{množina generující } V|$$

přičemž jsou naše lineárně nezávislá množina a množina generující V libovolné.

- Tyto výsledky dostaneme pomocí „Steinitzova lemmatu o výměně“.
- Nejdříve uvedeme Steinitzovo lemma o výměně, potom ho použijeme, abychom dokázali výše uvedené důsledky, a nakonec Steinitzovo lemma o výměně dokážeme.

Steinitzovo lemma o výměně

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .

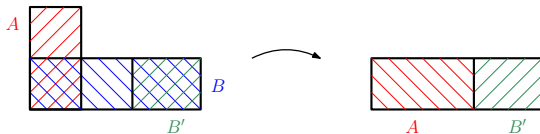


- Nejdřív par poznámek, pak důsledky, pak důkaz.

- Z technických důvodů (abychom získali množinu B') předpokládá Steinitzovo lemma o výměně, že množiny A a B neobsahují žádná opakování prvků.
 - Ve skutečnosti by bylo možné formulovat a dokázat verzi Steinitzova lemmatu o výměně, která opakování dovoluje.
 - Ale vedlo by to k docela nepřehlednému značení.
- Pokud nám však jde pouze o část „ $|A| \leq |B|$ “ Steinitzova lemmatu o výměně (což je obvykle to, na čem záleží), pak tento předpoklad není nutný.
- Předpokládejme totiž, že V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, že A je lineárně nezávislá množina vektorů ve V a že B je množina generující V (s případnými opakováními).
- Protože A je lineárně nezávislá, žádná opakování neobsahuje; množina B však opakování obsahovat může.
- Pak nechť $\tilde{B}$ je množina získaná z B odstraněním opakujících se prvků.
- Množina $\tilde{B}$ je stále množinou generující V , a podle Steinitzova lemmatu o výměně dostáváme $|A| \leq |\tilde{B}| \leq |B|$.

Steinitzovo lemma o výměně

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .



- Nyní se podívejme na nejdůležitější důsledky Steinitzova lemmatu o výměně.

Věta 10

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak všechny báze V mají stejný počet vektorů.

Důkaz (za předpokladu Steinitzova lemmatu o výměně). Použijeme Steinitzovo lemma o výměně dvakrát.

Nechť $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ jsou báze vektorového prostoru V .

Jelikož je množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ lineárně nezávislá, zatímco množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ generuje V , vyplývá ze Steinitzova lemmatu o výměně, že $m \leq n$.

Na druhou stranu, jelikož je množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineárně nezávislá, zatímco množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ generuje V , vyplývá ze Steinitzova lemmatu o výměně, že $n \leq m$.

Tím jsme ukázali, že $m = n$. $\square$

Věta 10

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak všechny báze V mají stejný počet vektorů.

Definice

Dimenze konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, kterou značíme $\dim(V)$, je počet vektorů v libovolné bázi V .

• Poznámky:

- Všimněme si, že $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ (kde $\{\mathbf{0}\}$ se chápe jako vektorový prostor nad libovolným tělesem $\mathbb{F}$), protože $\emptyset$ je báze $\{\mathbf{0}\}$.
- Pro libovolné těleso $\mathbb{F}$ platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, protože kanonická báze vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ má n vektorů.
 - Ale kanonická báze **není** jediná báze $\mathbb{F}^n$ (s výjimkou velmi speciálních případů).

Věta 11

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht' $n := \dim(V)$. Pak platí:

- Ⓐ každá lineárně nezávislá množina vektorů v V má nejvíce n vektorů;
- Ⓑ každá množina vektorů, která generuje V , má alespoň n vektorů.

Důkaz (za předpokladu Steinitzova lemmatu o výměně). Necht' $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je báze V . Pak je B lineárně nezávislá množina, která zároveň generuje V .

Podle Steinitzova lemmatu o výměně je počet vektorů v libovolné lineárně nezávislé množině prostoru V nejvýše roven počtu vektorů v generující množině B prostoru V , což je n ; tedy platí (a).

Na druhou stranu, podle Steinitzova lemmatu o výměně je počet vektorů v libovolné množině, která generuje V , alespoň roven počtu vektorů v lineárně nezávislé množině B ; tedy platí (b). $\square$

- Shrnutí (důsledky Steinitzova lemmatu o výměně):

Věta 10

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pak všechny báze V mají stejný počet vektorů.

Definice

Dimenze konečnědimenzionálního vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{F}$, kterou značíme $\dim(V)$, je počet vektorů v libovolné bázi V .

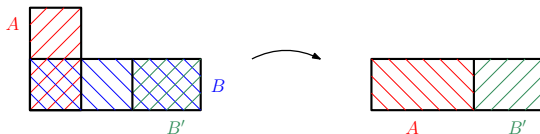
Věta 11

Nechť V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $n := \dim(V)$. Pak platí:

- a) každá lineárně nezávislá množina vektorů v V má nejvíce n vektorů;
- b) každá množina vektorů, která generuje V , má alespoň n vektorů.

Steinitzovo lemma o výměně

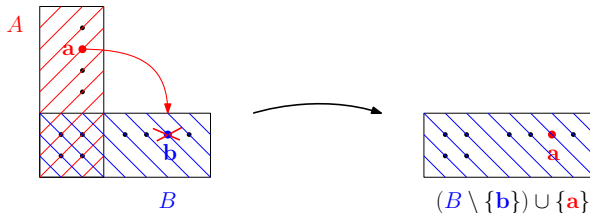
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .

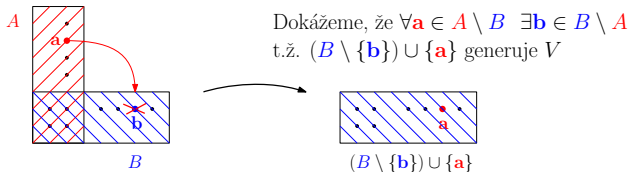


- Nyní dokažme Steinitzovo lemma o výměně!
- Důkaz postupuje indukcí za použití následujícího lemmatu (viz další slajd).

Lemma 12

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak pro každé $\mathbf{a} \in A \setminus B$, existuje $\mathbf{b} \in B \setminus A$ t.ž. $(B \setminus \{\mathbf{b}\}) \cup \{\mathbf{a}\}$ generuje V .



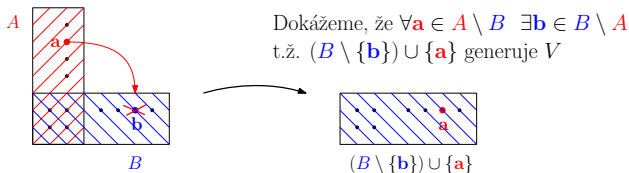


Důkaz. Můžeme předpokládat, že $A \not\subseteq B$, protože jinak máme hotovo. Nechť $\mathbf{a} \in A \setminus B$. Pak $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ t.ž. $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i$. Jelikož $\mathbf{a}_i \in V = \text{Span}(B)$, existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{F}$ t.ž.

$$\mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell.$$

Tvrzení. Existuje $j \in \{1, \dots, \ell\}$ t.ž. $\alpha_j \neq 0$ a $\mathbf{b}_j \in B \setminus A$.

Důkaz Tvrzení. Předpokládejme pro spor, že pro každé $j \in \{1, \dots, \ell\}$ takové, že $\alpha_j \neq 0$, platí $\mathbf{b}_j \in B \cap A \subseteq A \setminus \{\mathbf{a}_i\}$. Nyní je $\mathbf{a}_i$ lineární kombinací vektorů z množiny $A \setminus \{\mathbf{a}_i\}$, což je v rozporu s Tvrzením 8(a) (protože je množina A lineárně nezávislá). ♦



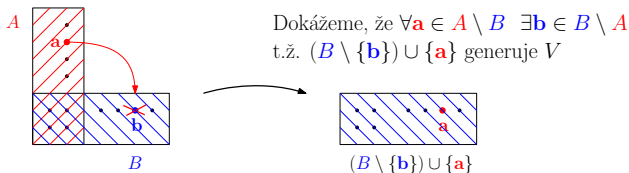
Důkaz (pokračování). Připomenutí: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell$.

Tvrzení. Existuje $j \in \{1, \dots, \ell\}$ t.ž. $\alpha_j \neq 0$ a $\mathbf{b}_j \in B \setminus A$.

Na základě Tvrzení zafixujeme index $j \in \{1, \dots, \ell\}$ t.ž. $\alpha_j \neq 0$ a $\mathbf{b}_j \in B \setminus A$. Ukážeme, že $(B \setminus \{\mathbf{b}_j\}) \cup \{\mathbf{a}_i\}$ je množina generující V (tím se důkaz lemmatu dokončí).

Jelikož $\mathbf{b}_j \neq \mathbf{a}_i$, vidíme, že $(B \setminus \{\mathbf{b}_j\}) \cup \{\mathbf{a}_i\} = (B \cup \{\mathbf{a}_i\}) \setminus \{\mathbf{b}_j\}$, a potřebujeme tedy ukázat, že množina $(B \cup \{\mathbf{a}_i\}) \setminus \{\mathbf{b}_j\}$ generuje V . Jelikož množina B generuje V , množina $B \cup \{\mathbf{a}_i\}$ také generuje V .

Vzhledem k Tvrzení 8(b) nyní stačí dokázat, že $\mathbf{b}_j$ je lineární kombinací vektorů z $(B \cup \{\mathbf{a}_i\}) \setminus \{\mathbf{b}_j\}$.



Důkaz (pokračování). Připomenutí: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell$; $\alpha_j \neq 0$, $\mathbf{b}_j \in B \setminus A$. Je třeba dokázat, že $\mathbf{b}_j$ je lineární kombinací vektorů z $(B \cup \{\mathbf{a}_i\}) \setminus \{\mathbf{b}_j\}$.

Jelikož $\mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell$, vidíme, že

$$\alpha_j \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i - \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \dots - \alpha_{j-1} \mathbf{b}_{j-1} - \alpha_{j+1} \mathbf{b}_{j+1} - \dots - \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell.$$

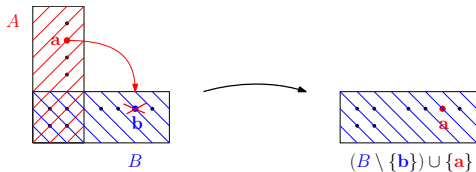
Jelikož $\alpha_j \neq 0$, má α_j inverzní prvek α_j^{-1} , a plyne, že

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j &= \alpha_j^{-1} \mathbf{a}_i - \alpha_j^{-1} \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \dots - \alpha_j^{-1} \alpha_{j-1} \mathbf{b}_{j-1} - \\ &\quad - \alpha_j^{-1} \alpha_{j+1} \mathbf{b}_{j+1} - \dots - \alpha_j^{-1} \alpha_\ell \mathbf{b}_\ell. \end{aligned}$$

Tedy je $\mathbf{b}_j$ skutečně lineární kombinací vektorů z $(B \cup \{\mathbf{a}_i\}) \setminus \{\mathbf{b}_j\}$, čímž je důkaz ukončen. $\square$

Lemma 12

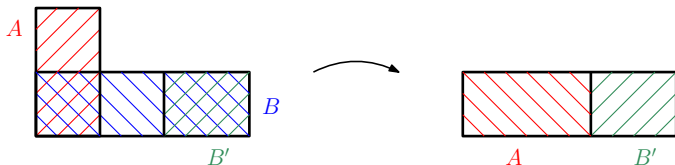
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak pro každé $\mathbf{a} \in A \setminus B$, existuje $\mathbf{b} \in B \setminus A$ t.ž. $(B \setminus \{\mathbf{b}\}) \cup \{\mathbf{a}\}$ generuje V .

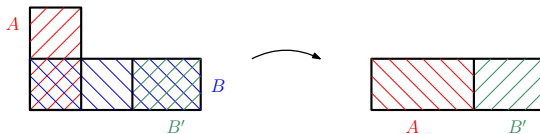


- Steinitzovo lemma o výměně lze dokázat opakovaným použitím Lemmatu 12 (technicky jde o indukci).
 - Formální důkaz je uveden ve skriptech (Penev - oddíl 3.2.4).
 - Zde uvedeme nástin důkazu.

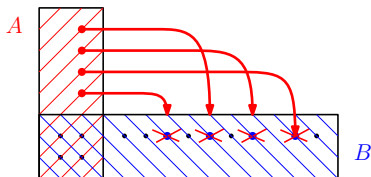
Steinitzovo lemma o výměně

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .





Důkaz (nástin). Pomocí Lemmatu 12 „přihodíme” vektory z $A \setminus B$ do B jeden po druhém a v každém kroku zároveň „odstraníme” jeden vektor z $B \setminus A$ z B .



Podle Lemmatu 12 ve každém kroku množina, kterou dostaneme, stále generuje V . Na konci dostaneme množinu, která generuje V , obsahuje A jako podmnožinu a zároveň má stejný počet vektorů jako B . B' je množina všech vektorů z množiny $B \setminus A$, které jsme „neodstranili” z B . $\square$

Steinitzovo lemma o výměně

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in V$ a předpokládejme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vzájemně různé a zároveň jsou vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ vzájemně různé. Předpokládejme navíc, že $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je lineárně nezávislá množina, zatímco množina $B := \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell\}$ generuje V . Pak platí $k \leq \ell$ (tj. $|A| \leq |B|$). Navíc existuje množina $B' \subseteq B \setminus A$ t.ž. $|B'| = |B| - |A| = \ell - k$ a $A \cup B'$ generuje V .

