

# Lineární algebra 1

## Přednáška č.5

První pohled na isomorfismy. Regulární matice

Irena Penev

29.10.2025

Během příštích několika týdnů (dokud neprobereme tělesa formálně, tj. axiomaticky) budeme předpokládat, že uvažované těleso  $\mathbb{F}$  je jedno z následujících:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  nebo  $\mathbb{Z}_p$  (kde  $p$  je prvočíslo). Nicméně, všechno, co dokážeme během těchto přednášek, bude platit pro libovolná tělesa  $\mathbb{F}$ , nejen pro tato čtyři.

- **Pozor:** Následující množiny **nejsou** tělesa:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_n$  (kde  $n \in \mathbb{N}$  **není** prvočíslo).

Tato přednáška má dvě části:

- 1 Složení lineárních funkcí a první pohled na isomorfismy
- 2 Regulární matice

## 1 Složení lineárních funkcí a první pohled na isomorfismy

### • Připomenutí:

#### Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je *lineární* pokud platí:

- 1  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m: f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v});$
- 2  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

#### Tvrzení 3 z Přednášky č.4

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso, necht'  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice a definujme zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ . Pak je  $f$  lineární zobrazení.

- Zobrazení tvaru  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ , kde  $A$  je nějaká pevně daná matice, se občas nazývá *maticovým zobrazením*.
- Dle Tvrzení 3 z Přednášky č.4, maticová zobrazení jsou lineární.

- **Připomenutí:** Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $i \in \{1, \dots, n\}$  označme  $\mathbf{e}_i^n$  vektor v  $\mathbb{F}^n$ , jehož  $i$ -tá složka je 1, zatímco všechny ostatní složky jsou nulové.

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-tá složka}$$

- Je-li  $n$  jasné z kontextu, vynecháváme horní index  $n$  a píšeme prostě  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  namísto  $\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_n^n$ , respektive.
- Vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  nazýváme *kanonickými jednotkovými vektory*, zatímco množinu  $\mathcal{E}_n := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  nazýváme *kanonickou bází* prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

- **Připomenutí:**

### Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je *lineární* pokud platí:

- 1  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m: f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v});$
- 2  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

### Věta 4 z Přednášky č.4

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  t.ž.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$  platí  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Navíc je tato matice  $A$  dána vzorcem

$$A = [ f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m) ],$$

kde  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  jsou kanonické jednotkové vektory z  $\mathbb{F}^m$ .

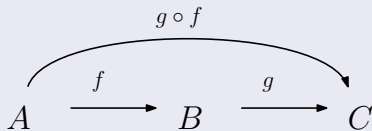
- Terminologie: Matice  $A$  se nazývá *maticí lineárního zobrazení  $f$  vzhledem ke kanonickým bázím*.
  - Abychom ušetřili místo na slajdech, použijeme zkratku: **matice v.k.k.b.** = **matice vzhledem ke kanonickým bázím**
  - Terminologii vysvětlíme později (za několik týdnů).

- Z Diskrétní matematiky:

### Definice

Nechť  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$  jsou zobrazení, kde  $A$ ,  $B$  a  $C$  jsou nějaké množiny. Definujeme *složení zobrazení*  $g$  a  $f$  jako zobrazení  $g \circ f : A \rightarrow C$  dané předpisem

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$



## Tvrzení 1

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓐ pro všechna lineární zobrazení  $f, g : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení  $f + g$  lineární, a navíc, jsou-li  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$  matice lineárních zobrazení  $f, g$  respektive v.k.k.b., pak je  $A + B$  maticí lineárního zobrazení  $f + g$  v.k.k.b.;<sup>a</sup>
- Ⓑ pro všechna lineární zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  a skaláry  $\alpha \in \mathbb{F}$  je zobrazení  $\alpha f$  lineární, a navíc, je-li  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  matice lineárního zobrazení  $f$  v.k.k.b., pak je  $\alpha A$  maticí lineárního zobrazení  $\alpha f$  v.k.k.b.;<sup>b</sup>

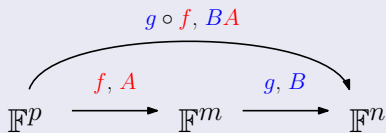
---

<sup>a</sup>Zobrazení  $(f + g) : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je definováno předpisem  
 $(f + g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m$ .

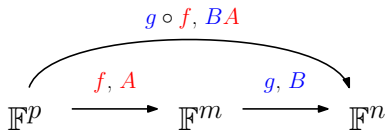
<sup>b</sup>Zobrazení  $(\alpha f) : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je definováno předpisem  
 $(\alpha f)(\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m$ .

## Tvrzení 1 (pokračování)

- pro všechna lineární zobrazení  $f : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^m$  a  $g : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ , je zobrazení  $g \circ f$  lineární, a navíc, jsou-li  $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$  a  $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$  matice lineárních zobrazení  $f$  a  $g$  respektive v.k.k.b., pak je  $BA$  maticí lineárního zobrazení  $g \circ f$  v.k.k.b.



- Části (a) a (b) jsou jednoduché. Dokážeme (c).



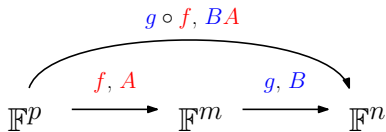
*Důkaz části (c).* Necht  $f : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^m$  a  $g : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou lineární zobrazení. Necht  $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$  a  $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$  jsou matice lineárních zobrazení  $f$  a  $g$  respektive.

Všimněme si, že pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^p$  platí:

$$(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) \stackrel{(*)}{=} g(A\mathbf{u}) \stackrel{(**)}{=} B(A\mathbf{u}) \stackrel{(***)}{=} (BA)\mathbf{u},$$

kde

- (\*) plyne z toho, že  $A$  je maticí lineárního zobrazení  $f$  v.k.k.b.,
- (\*\*) plyne z toho, že  $B$  je maticí lineárního zobrazení  $g$  v.k.k.b.,
- (\*\*\*) plyne z asociativity maticového násobení.



*Důkaz části (c).* Dokázali jsme, že

$$(g \circ f)(\mathbf{u}) = (BA)\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^p$$

a tedy je  $g \circ f$  maticové zobrazení.

Jelikož jsou maticová zobrazení lineární, plyne, že zobrazení  $g \circ f$  je lineární.

Navíc z rovností výše a z definice plyne, že  $BA$  je maticí lineárního zobrazení  $g \circ f$  v.k.k.b.  $\square$

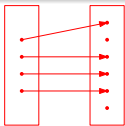
## Definice

Zobrazení  $f : A \rightarrow B$  nazýváme

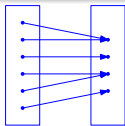
- *injekcí* (nebo *injektivním zobrazením*, nebo *prostým zobrazením*), pokud  $\forall a_1, a_2 \in A$  t.ž.  $a_1 \neq a_2$  platí  $f(a_1) \neq f(a_2)$ ;<sup>a</sup>
- *surjekcí* (nebo *surjektivním zobrazením*, nebo *zobrazením na*), pokud  $\forall b \in B \exists a \in A$  t.ž.  $f(a) = b$ ;
- *bijekcí* (nebo *bijektivním zobrazením*), pokud je prosté a zároveň na.

---

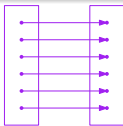
<sup>a</sup>Ekvivalentně: zobrazení  $f : A \rightarrow B$  je *prosté*, pokud  $\forall a_1, a_2 \in A$  t.ž.  $f(a_1) = f(a_2)$  platí  $a_1 = a_2$ .



injekce  
(prosté zobrazení)



surjekce  
(zobrazení na)



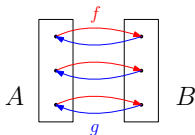
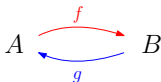
bijekce

- Z Diskrétní matematiky:

### Tvrzení 2

Nechť  $f : A \rightarrow B$  je zobrazení. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $f$  je bijekce;
- Ⓑ  $\exists g : B \rightarrow A$  t.ž.  $g \circ f = \text{Id}_A$  a  $f \circ g = \text{Id}_B$ .

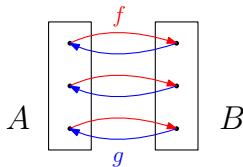
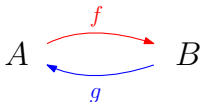


### Tvrzení 3

Nechť  $f : A \rightarrow B$  je bijekce. Pak  $\exists! g : B \rightarrow A$  t.ž.  $g \circ f = \text{Id}_A$  a  $f \circ g = \text{Id}_B$ .

### Tvrzení 3

Nechť  $f : A \rightarrow B$  je bijekce. Pak  $\exists! g : B \rightarrow A$  t.ž.  $g \circ f = \text{Id}_A$  a  $f \circ g = \text{Id}_B$ .



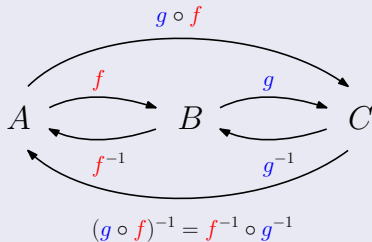
- **Terminologie/Značení:** Je-li  $f : A \rightarrow B$  bijekcí, pak jediné zobrazení  $g : B \rightarrow A$  t.ž.  $g \circ f = \text{Id}_A$  a  $f \circ g = \text{Id}_B$  nazýváme *inverzním zobrazením* (nebo *inverzí*) k bijekci  $f$  a značíme jej  $f^{-1}$ .
- To znamená:
  - $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ ;
  - $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ ;
  - $\forall a \in A, b \in B: b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$ .
- Inverze k bijekci  $f$  je také bijekce, a navíc platí  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

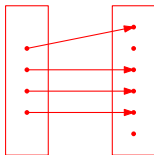
- Z Diskrétní matematiky:

#### Tvrzení 4

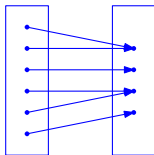
Pro všechna zobrazení  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$  platí:

- Ⓐ jsou-li zobrazení  $f$  a  $g$  prostá, pak je zobrazení  $g \circ f$  prosté;
- Ⓑ jsou-li zobrazení  $f$  a  $g$  na, pak je zobrazení  $g \circ f$  na;
- Ⓒ jsou-li zobrazení  $f$  a  $g$  bijekce, pak je zobrazení  $g \circ f$  také bijekcí, a navíc platí  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

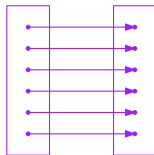




injekce  
(prosté zobrazení)



surjekce  
(zobrazení na)



bijekce

- Necht  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je **lineární** zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso).
  - Jak zjistíme, zda je  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  prosté/na/bijektivní?
  - Jak uvidíme, stačí upravit matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  lineárního zobrazení  $f$  v.k.k.b. a spočítat  $\text{rank}(A)$ .

- **Připomenutí:**

### Důsledek 8 z Přednášky č.3

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a)  $\text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnost);
- b) homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ );
- c)  $\exists \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  t.ž. rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má jediné řešení;
- d)  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení.

### Důsledek 9 z Přednášky 3

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a)  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnost);
- b)  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná.

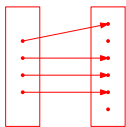
### Věta 5.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht'  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak platí:

- Ⓐ  $f$  je prosté  $\iff \text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnotu);
- Ⓑ  $f$  je na  $\iff \text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnotu).

*Důkaz.* Jak uvidíme:

- část (a) plyne z **Důsledku 8** z Přednášky 3;
- část (b) plyne z **Důsledku 9** z Přednášky 3.



injekce (prosté zobrazení)

- Ⓐ  $f$  je prosté  $\iff \text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnost);

Důkaz části (a).

$f$  je prosté

$\iff$   
def.

$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ : má rovnice  
 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$  :

$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$   
 $\iff$

$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ : má rovnice  
 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení

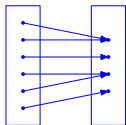
Důsledek 8

z Přednášky 3

$\iff$

$\text{rank}(A) = m$ , tj.  $A$  má  
plnou sloupcovou hodnost

□



surjekce (zobrazení na)

ⓑ  $f$  je na  $\iff \text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnost).

Důkaz části (b).

$f$  je na  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ : je rovnice  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  řešitelná

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$  :

$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$   
 $\iff$

$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ : je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná

Důsledek 9

z Přednášky 3  
 $\iff$

$\text{rank}(A) = n$ , tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnost



### Věta 5.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak platí:

- a)  $f$  je prosté  $\iff \text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnost);
- b)  $f$  je na  $\iff \text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnost).

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  nazveme *isomorfismem*, pokud je lineární a zároveň bijektivní.

## Věta 6.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $f$  je isomorfismus;
- b)  $\text{rank}(A) = m = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

- Důkaz: za chvíli (ale v podstatě plyne z Věty 5).
- **Poznámka:** Necht  $\mathbb{F}$  je těleso.
  - Podle Věty 5 platí: jsou-li  $m \neq n$  přirozená čísla, pak **neexistuje** žádný isomorfismus  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ .
  - Je-li  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  matice lineárního zobrazení  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  v.k.k.b., lze jednoduše určit, zda je  $f$  isomorfismus: stačí upravit matici  $A$  a určit, zda  $A$  má plnou hodnost.

## Věta 6.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $f$  je isomorfismus;
- b)  $\text{rank}(A) = m = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že (a) platí. Pak je lineární zobrazení  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  **prosté** a **na**.

- Jelikož je  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  **prosté** lineární zobrazení, plyne z Věty 5(a), že  $\text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má **plnou sloupcovou hodnost**).
- Jelikož je  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineární zobrazení **na**, plyne z Věty 5(b), že  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má **plnou řádkovou hodnost**).

Plyne, že  $\text{rank}(A) = m = n$ , tj. platí (b).

## Věta 6.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $f$  je isomorfismus;
- b)  $\text{rank}(A) = m = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

*Důkaz (pokračování).* Předpokládejme nyní, že (b) platí.

Tedy má  $A$  **plnou sloupcovou hodnost** (protože  $\text{rank}(A) = m$ ), a zároveň **plnou řádkovou hodnost** ( $\text{rank}(A) = n$ ).

- Jelikož má  $A$  **plnou sloupcovou hodnost**, plyne z Věty (5)(a), že lineární zobrazení  $f$  je **prosté**.
- Jelikož má  $A$  **plnou řádkovou hodnost**, plyne z Věty (5)(a), že lineární zobrazení  $f$  je **na**.

Plyne, že je lineární zobrazení  $f$  bijekce, a tedy izomorfismus. Tedy platí (a).  $\square$

### Věta 5.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak platí:

- a)  $f$  je prosté  $\iff \text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnot);
- b)  $f$  je na  $\iff \text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnot).

### Věta 6.

Nechť  $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) a necht  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice  $f$  v.k.k.b. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $f$  je isomorfismus;
- b)  $\text{rank}(A) = m = n$  (tj.  $A$  je čtvercová matice plné hodnosti).

## Důsledek 7

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je **lineární** zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso).<sup>a</sup> Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je matice  $f$  v.k.k.b.<sup>b</sup> Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ  $f$  je prosté;
- Ⓑ  $f$  je na;
- Ⓒ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

---

<sup>a</sup>Tedy předpokládáme, že definiční obor = obor hodnot =  $\mathbb{F}^n$ .

<sup>b</sup>Všimněme si, že  $A$  je **čtvercová** matice.

*Důkaz.* Dle Věty 6 platí  $(c) \iff (d)$ . Dle definice platí  $((a) \wedge (b)) \iff (c)$ . Tedy stačí dokázat, že  $(a) \iff (b)$ .

Důkaz (pokračování). Připomenutí:  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární;  $A$  je matice  $f$  v.k.k.b.

$f$  je **prosté**  
(a)

Věta 5(a)  
 $\iff$

$A$  má **plnou sloucovou hodnost**

matice  $A$  je  
čtvercová  
 $\iff$

$A$  má **plnou řádkovou hodnost**

Věta 5(b)  
 $\iff$

$f$  je **na**  
(b)

□

## Důsledek 7

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je **lineární** zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso).<sup>a</sup> Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je matice  $f$  v.k.k.b.<sup>b</sup> Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $f$  je prosté;
- b)  $f$  je na;
- c)  $f$  je isomorfismus;
- d)  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

---

<sup>a</sup>Tedy předpokládáme, že definiční obor = obor hodnot =  $\mathbb{F}^n$ .

<sup>b</sup>Všimněme si, že  $A$  je **čtvercová** matice.

## Věta 8

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak je i  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  isomorfismem.

*Důkaz.* Jelikož je  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  isomorfismus, a tedy bijekce, má  $f$  inverzi  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , která je také bijekcí. Nyní stačí dokázat, že zobrazení  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární, tj. že platí:

- 1  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{F}^n: f^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f^{-1}(\mathbf{v}_1) + f^{-1}(\mathbf{v}_2);$
- 2  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, \alpha \in \mathbb{F}: f^{-1}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f^{-1}(\mathbf{v}).$

## Věta 8

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak je i  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  isomorfismem.

*Důkaz (pokračování).* (1) Nechť  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{F}^n$ . Je třeba dokázat, že  $f^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f^{-1}(\mathbf{v}_1) + f^{-1}(\mathbf{v}_2)$ .

Položme  $\mathbf{u}_1 := f^{-1}(\mathbf{v}_1)$  a  $\mathbf{u}_2 := f^{-1}(\mathbf{v}_2)$ ; tedy platí  $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$  a  $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$ .

Nyní spočítáme:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= f^{-1}(f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)) \\ &= f^{-1}(f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) && \text{dle linearity} \\ &= (f^{-1} \circ f)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) && \text{zobrazení } f \\ &= \text{Id}_{\mathbb{F}^n}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= f^{-1}(\mathbf{v}_1) + f^{-1}(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

## Věta 8

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak je i  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  isomorfismem.

*Důkaz (pokračování).* (2) Nechť  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  a  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Je třeba dokázat, že  $f^{-1}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f^{-1}(\mathbf{v})$ .

Položme  $\mathbf{u} := f^{-1}(\mathbf{v})$ ; tedy platí  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ .

Nyní spočítáme:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha\mathbf{v}) &= f^{-1}(\alpha f(\mathbf{u})) \\ &= f^{-1}(f(\alpha\mathbf{u})) && \text{dle linearity} \\ &= (f^{-1} \circ f)(\alpha\mathbf{u}) && \text{zobrazení } f \\ &= \text{Id}_{\mathbb{F}^n}(\alpha\mathbf{u}) \\ &= \alpha\mathbf{u} \\ &= \alpha f^{-1}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

## Věta 8

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak je i  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  isomorfismem.

*Důkaz (pokračování).* Dokázali jsme, že platí:

- 1  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{F}^n: f^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f^{-1}(\mathbf{v}_1) + f^{-1}(\mathbf{v}_2);$
- 2  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, \alpha \in \mathbb{F}: f^{-1}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f^{-1}(\mathbf{v}).$

Plyne, že  $f$  je lineární. Už jsme viděli, že  $f^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je bijekcí, a tedy plyne, že  $f^{-1}$  isomorfismus.  $\square$

## 2 Regulární matice

- **Připomenutí:** Jednotková matice:

$$I_n := \left[ \mathbf{e}_1^n \quad \dots \quad \mathbf{e}_n^n \right]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

### Tvrzení 6 z Přednášky č.4

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak je identické zobrazení  $\text{Id}_{\mathbb{F}^n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineární a jeho matice v.k.k.b. je jednotková matice  $I_n$ .

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. **Čtvercová** matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je *regulární* (neboli *invertibilní*), pokud existuje matice  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , kterou nazýváme *inverzní maticí* (nebo *inverzí*) k matici  $A$ , t.ž.  $AB = BA = I_n$ . Čtvercová matice, která není regulární, je *singulární*.

- **Poznámka:** Později uvidíme, že regulární matice jsou právě matice izomorfismů v.k.k.b.

## Tvrzení 9

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak každá regulární matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  má **jedinou** inverzní matici.

- **Důkaz:** za chvíli.
- **Značení:** Jedinou inverzi regulární matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  značíme  $A^{-1}$ .

## Příklad

Reálná matice  $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  je regulární a má inverzní matici

$A^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , protože

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

- Za chvíli uvidíme, jak lze určit, zda je daná čtvercová matice regulární, a pokud ano, jak lze vypočítat její inverzní matici.

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. **Čtvercová** matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je *regulární* (neboli *invertibilní*), pokud existuje matice  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , kterou nazýváme *inverzní maticí* (nebo *inverzí*) k matici  $A$ , t.ž.  $AB = BA = I_n$ . Čtvercová matice, která není regulární, je *singulární*.

- **Alternativní definice:** Čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) je *regulární*, pokud homogenní rovnice

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

- Později uvidíme, že jsou tyto dvě definice ekvivalentní, tj. že čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  má inverzi právě tehdy, když má homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  pouze triviální řešení.
  - V průběhu této přednášky budeme používat definici s inverzními maticemi.

## Tvrzení 9

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak každá regulární matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  má **jedinou** inverzní matici.

*Důkaz.* Jelikož je matice  $A$  regulární, má alespoň jednu inverzní matici. Předpokládejme že  $B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  jsou inverze k regulární matici  $A$ , a tedy platí  $AB = BA = I_n$  a  $AC = CA = I_n$ . Pak platí:

$$\begin{aligned} B &= BI_n \\ &= B(AC) && \text{protože } AC = I_n \\ &= (BA)C && \text{dle asociativity} \\ &&& \text{maticového násobení} \\ &= I_n C && \text{protože } BA = I_n \\ &= C. \end{aligned}$$



### Tvrzení 9

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak každá regulární matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  má **jedinou** inverzní matici.

- Podobně lze dokázat následující technické tvrzení:

### Tvrzení 10

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Necht  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  jsou čtvercové matice t.ž.  $A$  je regulární a zároveň platí  $AB = I_n$  **nebo**  $BA = I_n$ . Pak  $A^{-1} = B$ .

- Důkaz: zkuste sami!
  - Pro  $AB = I_n$  důkaz naleznete ve skriptech (Penev - Proposition 1.11.3)
  - Důkaz pro  $BA = I_n$  je podobný.

## Tvrzení 9

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak každá regulární matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  má **jedinou** inverzní matici.

## Tvrzení 10

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Necht  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  jsou čtvercové matice t.ž.  $A$  je regulární a zároveň platí  $AB = I_n$  **nebo**  $BA = I_n$ . Pak  $A^{-1} = B$ .

- **Poznámka:** Tvrzení 10 lze aplikovat pouze v případě, že už víme, že matice  $A$  je regulární.
  - Později (za několik týdnů) uvidíme, že tuto hypotézu lze vynechat: jsou-li  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  **čtvercové** matice t.ž.  $AB = I_n$ , pak jsou  $A$  a  $B$  regulární a jsou navzájem inverzními maticemi (tj.  $A^{-1} = B$  a  $B^{-1} = A$ ).
  - Abychom dokázali toto silnější tvrzení, potřebujeme teorii, kterou zatím neznáme. Tedy toto silnější tvrzení prozatím nebudeme používat.

- Následující věta dává recept, jak určit, zda je daná čtvercová matice  $A$  regulární, a pokud ano, jak vypočítat její inverzní matici.

### Věta 11

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Položme  $[ U \mid B ] = \text{RREF}([ A \mid I_n ])$ .<sup>a</sup> Pak platí:

- Ⓐ jestliže  $U = I_n$ , pak je  $A$  regulární a  $A^{-1} = B$ ;
- Ⓑ jestliže  $U \neq I_n$ , pak je  $A$  singulární (tj.  $A$  není regulární).

---

<sup>a</sup>Tady jsou  $B$  a  $U$  čtvercové matice typu  $n \times n$ .

- Nejprve se podíváme na příklad.
- Potom rozvineme teorii, kterou potřebujeme, abychom dokázali Větu 11.

## Příklad

Určete, zda jsou následující čtvercové matice regulární. Jsou-li regulární, vypočítejte jejich inverzní matice.

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky jsou reálná čísla.

b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky patří do  $\mathbb{Z}_2$ .

c)  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky patří do  $\mathbb{Z}_3$ .

## Příklad

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky jsou reálná čísla.

Řešení. Uvažujme matici:

$$[A \mid I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}([A \mid I_2]) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Podmatice matice  $\text{RREF}([A \mid I_2])$  nalevo od svislé tečkované čáry je rovna  $I_2$ . Plyne, že  $A$  je regulární a její inverzní matice je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



## Příklad

b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky patří do  $\mathbb{Z}_2$ .

*Řešení.* Uvažujme matici:

$$[ B \mid I_3 ] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}([ B \mid I_3 ]) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

## Příklad

b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , jejíž prvky patří do  $\mathbb{Z}_2$ .

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[ B \mid I_3 \right]\right) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Podmatice matice  $\text{RREF}\left(\left[ B \mid I_3 \right]\right)$  nalevo od svislé tečkované čáry je rovna  $I_3$ . Plyne, že  $B$  je regulární a její inverzní matice je:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



## Příklad

$$\textcircled{c} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ jejíž prvky patří do } \mathbb{Z}_3.$$

*Řešení.* Uvažujme matici:

$$[C \mid I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}([C \mid I_3]) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Podmatice matice  $\text{RREF}([C \mid I_3])$  nalevo od svislé tečkované čáry **není** rovna  $I_3$ . Plyne, že  $C$  je singulární (tj.  $C$  není regulární).  $\square$

## Věta 11

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Položme  $[U \mid B] = \text{RREF}([A \mid I_n])$ .<sup>a</sup> Pak platí:

- Ⓐ jestliže  $U = I_n$ , pak je  $A$  regulární a  $A^{-1} = B$ ;
- Ⓑ jestliže  $U \neq I_n$ , pak je  $A$  singulární (tj.  $A$  není regulární).

---

<sup>a</sup>Tady jsou  $B$  a  $U$  čtvercové matice typu  $n \times n$ .

- Viděli jsme, jak se používá Věta 11.
- Nyní je třeba Větu 11 dokázat!
- K tomu rozvineme potřebnou teorii.
- Nejprve se podíváme na některé základní vlastnosti regulárních matic.
- Pak zavedeme „elementární matice“, dokážeme pár jejich vlastností a použijeme je, abychom dokázali Větu 11.

## Tvrzení 12

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓐ jednotková matice  $I_n$  je regulární a je sama sobě inverzní (tj.  $I_n^{-1} = I_n$ );
- Ⓑ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A^{-1}$  regulární, a navíc platí  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- Ⓒ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A^T$  regulární, a navíc platí  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- Ⓓ jsou-li matice  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $AB$  regulární, a navíc platí  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
- Ⓔ jsou-li matice  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A_1 \dots A_k$  regulární, a navíc platí  $(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$ ;
- Ⓕ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je pro každé  $m \in \mathbb{N}_0$  matice  $A^m$  regulární, a navíc platí  $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ .

- Důkaz naleznete ve skriptech (Penev – Proposition 1.11.8).
- Pro ilustraci zde dokážeme pouze část (d).

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je *regulární* (neboli *invertibilní*), pokud existuje matice  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , kterou nazýváme *inverzní maticí k matici A*, t.ž.  $AB = BA = I_n$ . Čtvercová matice, která není regulární, je *singulární*.

## Tvrzení 12

- Ⓣ jsou-li matice  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $AB$  regulární, a navíc platí  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;

*Důkaz.* Nechť  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  jsou regulární matice. Stačí dokázat, že  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ .

K tomu spočítáme (přičemž používáme asociativitu maticového násobení):

- $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ;
- $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ .



## Tvrzení 12

Ⓣ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je pro každé  $m \in \mathbb{N}_0$  matice  $A^m$  regulární, a navíc platí  $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ .

- **Značení:** Je-li  $A$  regulární matice (kde  $\mathbb{F}$  je těleso), pak pro každé  $m \in \mathbb{N}$  definujeme

$$A^{-m} := (A^{-1})^m.$$

- Dle Tvrzení 12(f) platí

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1}.$$

- **Poznámka:**  $A^{-m}$  (pro  $m \in \mathbb{N}$ ) je definována pouze tehdy, když je  $A$  regulární.

## Tvrzení 12

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓐ jednotková matice  $I_n$  je regulární a je sama sobě inverzní (tj.  $I_n^{-1} = I_n$ );
- Ⓑ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A^{-1}$  regulární, a navíc platí  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- Ⓒ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A^T$  regulární, a navíc platí  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- Ⓓ jsou-li matice  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $AB$  regulární, a navíc platí  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
- Ⓔ jsou-li matice  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A_1 \dots A_k$  regulární, a navíc platí  $(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$ ;
- Ⓕ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je pro každé  $m \in \mathbb{N}_0$  matice  $A^m$  regulární, a navíc platí  $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ .

### Věta 13

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární matice. Pak  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení, a to  $A^{-1}\mathbf{b}$ .

- Věta 13 je jedním z hlavních důvodů, proč nás zajímají regulární matice.
  - Z Věty 13 plyne, že je-li matice **koeficientů** lineární soustavy regulární, pak má lineární soustava právě jedno řešení.
- Nejprve se podíváme na příklad, pak dokážeme Větu 13.

## Příklad

Vyřešte rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(Prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  jsou reálná čísla.)

*Řešení.* V minulém příkladu jsme viděli, že matice  $A$  je regulární a její inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z Věty 13 nyní plyne, že rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má právě jedno řešení, a to

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

## Věta 13

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární matice. Pak  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení, a to  $A^{-1}\mathbf{b}$ .

- **Poznámka:**

- Už jsme viděli, jak lze zjistit, zda je čtvercová matice regulární a je-li regulární, jak lze vypočítat její inverzní matici.
    - Pravda, stále jsme ten „recept“ (tj. Větu 11) nedokázali.
  - Nicméně, v případě, že nevíme, zda je matice  $A$  regulární (nebo víme, že je regulární, ale ještě jsme nevypočítali  $A^{-1}$ ), rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejrychleji vyřešíme upravováním její rozšířené matice  $\left[ A \mid \mathbf{b} \right]$ .
  - Pro vyřešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  použijeme vzorec  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  pouze v případě, že už víme, že matice  $A$  je regulární a zároveň jsme (z jiných důvodů) už vypočítali její inverzní matici  $A^{-1}$ .
- Nyní dokažme Větu 13!

### Věta 13

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární matice. Pak  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení, a to  $A^{-1}\mathbf{b}$ .

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je libovolný vektor.

$A^{-1}\mathbf{b}$  je řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , protože:

$$A(A^{-1}\mathbf{b}) = \underbrace{(AA^{-1})}_{=I_n}\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Zbývá ukázat, že  $A^{-1}\mathbf{b}$  je **jediné** řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Nechť  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}^n$  je libovolné řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Tedy platí  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ . Násobením (zleva) obou stran rovnosti  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  maticí  $A^{-1}$  dostáváme právě  $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$ , přičemž jsme použili fakt, že:

$$A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = (A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = I_n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$



## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓑ  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- Ⓒ  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$ ;
- Ⓔ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho matice v.k.k.b. je  $A^{-1}$ .

- **Poznámka č.1:** Z ekvivalence (a) a (b) plyne, že regulární matice jsou právě matice isomorfismů v.k.k.b.

## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓑ  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- Ⓒ  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$ ;
- Ⓔ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho standardní matice je  $A^{-1}$ .

- **Poznámka č.2:** Z ekvivalence (a) a (e) plyne, že naše původní definice a „alternativní definice“ regulární matice jsou ekvivalentní.

## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓑ  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- Ⓒ  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$ ;
- Ⓔ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho standardní matice je  $A^{-1}$ .

- Nyní dokažme Větu 14!
  - Část Věty 14 vyplývá z tvrzení, která jsme už dokázali a která si teď připomeneme.

- **Připomenutí:**

### Důsledek 7

Nechť  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je **lineární** zobrazení (kde  $\mathbb{F}$  je těleso).<sup>a</sup> Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je matice  $f$  v.k.k.b.<sup>b</sup> Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ  $f$  je prosté;
- Ⓑ  $f$  je na;
- Ⓒ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  je **čtvercová** matice plné hodnosti).

---

<sup>a</sup>Tedy předpokládáme, že definiční obor = obor hodnot =  $\mathbb{F}^n$ .

<sup>b</sup>Všimněme si, že  $A$  je **čtvercová** matice.

- Tedy jsou ekvivalentní části (a) a (d) z Věty 14.

- **Připomenutí:**

### Věta 10 z Přednášky 3

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je **čtvercová matice** (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Ⓐ  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  je čtvercová matice plné hodnosti);
- Ⓑ  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- Ⓒ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ );
- Ⓓ  $\exists \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  t.ž. rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má jediné řešení;
- Ⓔ  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  jediné řešení;
- Ⓕ  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení;
- Ⓖ  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná.

- Tedy jsou ekvivalentní části (c), (d) a (e) z Věty 14.

## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a)  $f$  je isomorfismus;
- b)  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- c)  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- d)  $\text{rank}(A) = n$ ;
- e) homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho matice v.k.k.b. je  $A^{-1}$ .

*Důkaz.* Zobrazení  $f$  je maticové, a tedy lineární (dle Tvrzení 3 z Přednášky č.4). Dle definice je  $A$  matice  $f$  v.k.k.b. Navíc platí-li (a), pak je dle Věty 8 i  $f^{-1}$  isomorfismus.

## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- (a)  $f$  je isomorfismus;
- (b)  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- (c)  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- (d)  $\text{rank}(A) = n$ ;
- (e) homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho matice v.k.k.b. je  $A^{-1}$ .

*Důkaz (pokračování).* Ekvivalence částí (a) a (d) plyne z Důsledků 7, zatímco ekvivalence částí (c), (d) a (e) plyne z Věty 10 z Přednášky 3.

*Důkaz (pokračování).* Zbývá dokázat, že jsou ekvivalentní následující tvrzení:

Ⓐ  $f$  je isomorfismus

Ⓑ  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici),

a že v tomto případě je  $A^{-1}$  matice isomorfismu  $f^{-1}$  v.k.k.b.

Stačí dokázat:

(1) Je-li  $f$  isomorfismus, pak je  $A$  regulární, a navíc je  $A^{-1}$  matice isomorfismu  $f^{-1}$  v.k.k.b.

- Všimněme si, že z (1) plyne, že „(a)  $\implies$  (b)“, a zároveň, že platí-li (a), pak je  $A^{-1}$  matice isomorfismu  $f^{-1}$  v.k.k.b.

(2) Je-li  $A$  regulární, pak je  $f$  isomorfismus.

- Všimněme si, že z (2) plyne, že „(b)  $\implies$  (a)“

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{g \circ f, BA} & \\
 \mathbb{F}^p & \xrightarrow{f, A} \mathbb{F}^m & \xrightarrow{g, B} \mathbb{F}^n
 \end{array}$$

*Důkaz (pokračování).* Nejprve dokážeme:

- (1) Je-li  $f$  isomorfismus, pak je  $A$  regulární, a navíc je  $A^{-1}$  matice isomorfismu  $f^{-1}$  v.k.k.b.

Předpokládejme, že  $f$  je isomorfismus. Pak je i  $f^{-1}$  isomorfismus (dle Věty 8); necht  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je matice  $f^{-1}$  v.k.k.b. Je třeba dokázat, že  $A$  je regulární a  $B = A^{-1}$ .

Jelikož jsou  $f$  a  $f^{-1}$  lineární, plyne z Tvzení 1(c), že jsou i  $f \circ f^{-1}$  a  $f^{-1} \circ f$  lineární a že jejich matice v.k.k.b. jsou  $AB$  a  $BA$  respektive.

Zároveň platí  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{F}^n}$ , a matice identického zobrazení  $\text{Id}_{\mathbb{F}^n}$  v.k.k.b. je jednotková matice  $I_n$  (dle Tvzení 6 z Přednášky č.4).

Plyne, že  $AB = BA = I_n$ , a tedy je matice  $A$  regulární a její inverzní matice je  $B$ , tj.  $B = A^{-1}$ .

*Důkaz (pokračování).* Nyní dokážeme:

(2) Je-li  $A$  regulární, pak je  $f$  isomorfismus.

Předpokládejme, že  $A$  je regulární. Je třeba dokázat, že  $f$  je isomorfismus. Už víme, že zobrazení  $f$  je lineární; je třeba dokázat, že  $f$  je bijekce.

Definujme zobrazení  $g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  předpisem  $g(\mathbf{u}) = A^{-1}\mathbf{u}$

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$ . (Tedy je  $g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineární zobrazení, jehož **matice** v.k.k.b. je  $A^{-1}$ .) Dokážeme, že platí  $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{F}^n}$ .

Vzhledem k Tvzení 2 z toho vyplyne, že  $f$  je bijekce, což je právě to, co potřebujeme.

Vskutku pro každé  $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$  platí

- $(f \circ g)(\mathbf{u}) = f(g(\mathbf{u})) = A(A^{-1}\mathbf{u}) = (AA^{-1})\mathbf{u} = I_n\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ;
- $(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = A^{-1}(A\mathbf{u}) = (A^{-1}A)\mathbf{u} = I_n\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

Tím jsme dokázali, že  $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{F}^n}$ , a tedy je  $f$  bijekce.  $\square$

## Věta 14

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice a  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zobrazení dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ . Pak je zobrazení  $f$  lineární, přičemž je  $A$  jeho matice v.k.k.b. Navíc jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $f$  je isomorfismus;
- Ⓑ  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- Ⓒ  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- Ⓓ  $\text{rank}(A) = n$ ;
- Ⓔ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).

Navíc v tomto případě je  $f^{-1}$  isomorfismus a jeho matice v.k.k.b. je  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{red}\blacklozenge \\ \color{blue}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{blue}\blacklozenge \\ \color{green}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{green}\blacklozenge \\ \color{purple}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{purple}\blacklozenge \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} \color{red}\blacklozenge & \color{blue}\blacklozenge & \color{green}\blacklozenge & \color{purple}\blacklozenge \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \color{red}\blacklozenge & \color{blue}\blacklozenge & \color{green}\blacklozenge & \color{purple}\blacklozenge \end{bmatrix}$$

## Důsledek 15

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- (a)  $A$  je regulární;
- (b)  $A^T$  je regulární;
- (c)  $\text{rank}(A) = n$ ;
- (d)  $\text{rank}(A^T) = n$ .

*Důkaz.* Dle Věty 14 jsou ekvivalentní (a) a (c), a zároveň jsou ekvivalentní (b) a (d).

## Tvrzení 12

- Ⓒ je-li matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A^T$  regulární, a navíc platí  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;

## Důsledek 15

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $A$  je regulární;
- Ⓑ  $A^T$  je regulární;
- Ⓒ  $\text{rank}(A) = n$ ;
- Ⓓ  $\text{rank}(A^T) = n$ .

*Důkaz (pokračování).* Jelikož  $(A^T)^T = A$ , ekvivalence (a) a (b) plyne z Tvrzení 12(c). Vskutku dle Tvrzení 12(c):

- je-li  $A$  regulární, pak je regulární i  $A^T$ ;
- je-li  $A^T$  regulární, pak je regulární i  $(A^T)^T = A$ .



## Důsledek 15

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a)  $A$  je regulární;
- b)  $A^T$  je regulární;
- c)  $\text{rank}(A) = n$ ;
- d)  $\text{rank}(A^T) = n$ .

- **Poznámka:** Později (za několik týdnů) uvidíme, že pro každou matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí  $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$ .
  - Prozatím tento fakt neumíme dokázat, a proto ho nebudeme používat.

- **Připomenutí:** Elementární řádkové úpravy:

- ① Výměna (prohození) dvou řádků.
  - Výměnu  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku ( $i \neq j$ ) značíme „ $R_i \leftrightarrow R_j$ ”.
- ② Násobení řádku **nenulovým** číslem (skalárem).
  - Násobení  $i$ -tého řádku skalárem  $\alpha \neq 0$  značíme „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ”.
- ③ Přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.
  - Přičtení  $\alpha$ -tého násobku  $i$ -tého řádku k  $j$ -tému řádku ( $i \neq j$ ) začíme „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ”.

## Definice

*Elementární matice* je libovolná matice, kterou lze získat provedením právě jedné elementární řádkové úpravy na jednotkové matici  $I_n$ . Pro elementární řádkovou úpravu provedenou na matici s  $n$  řádky je *příslušnou elementární maticí* ta matice, kterou dostaneme provedením téže elementární řádkové úpravy na jednotkové matici  $I_n$ .

- **Poznámka:** Jednotková matice  $I_n$  je elementární, protože ji lze získat provedením elementární úpravy „ $R_1 \rightarrow 1R_1$ ” na matici  $I_n$ .

## • Příklady:

- ① Pro elementární řádkovou úpravu „ $R_2 \leftrightarrow R_4$ ” provedenou na matici s 5 řádky máme příslušnou elementární matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ② Pro elementární řádkovou úpravu „ $R_2 \rightarrow \alpha R_2$ ” (kde  $\alpha \neq 0$ ) provedenou na matici s 3 řádky máme příslušnou elementární matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ③ Pro elementární řádkovou úpravu „ $R_2 \rightarrow R_2 + \alpha R_3$ ” provedenou na matici s 3 řádky máme příslušnou elementární matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Poznámka:** Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak jsou vektory z  $\mathbb{F}^n$  jednoduše matice typu  $n \times 1$  s prvky v  $\mathbb{F}$ .
  - Tedy lze provádět elementární řádkové úpravy na vektorech v  $\mathbb{F}^n$ .
  - Dále lze elementární řádkové úpravy  $R$  na vektorech z  $\mathbb{F}^n$  chápat jako zobrazení  $f_R : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  t.ž. pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$  je  $f_R(\mathbf{u})$  vektor, který dostaneme provedením elementární řádkové úpravy  $R$  na vektoru  $\mathbf{u}$ .
    - Např. pro pevně dané  $\alpha \in \mathbb{F}$ , zobrazení  $f_{R_2 \rightarrow R_2 + \alpha R_3} : \mathbb{F}^4 \rightarrow \mathbb{F}^4$  je dáno předpisem:

$$f_{R_2 \rightarrow R_2 + \alpha R_3} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 + \alpha u_3 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \forall u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{F}.$$

## • Poznámka (pokračování):

- Jednoduše lze ověřit, že pro každou elementární řádkovou úpravu  $R$  na vektorech z  $\mathbb{F}^n$  je zobrazení  $f_R : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineární (ověřte, že  $f_R$  splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení).
  - Matice lineárního zobrazení  $f_R : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  v.k.k.b. je

$$E_R := \left[ f_R(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f_R(\mathbf{e}_n) \right],$$

což je právě matice, kterou získáme provedením elementární řádkové úpravy  $R$  na matici  $I_n$ , neboli elementární matice příslušná elementární řádkové úpravě  $R$ .

- Tedy  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$  platí  $f_R(\mathbf{u}) = E_R \mathbf{u}$ , tj.  $E_R \mathbf{u}$  je vektor, který získáme provedením elementární řádkové úpravy  $R$  na  $\mathbf{u}$ .
- Tedy pro každou matici  $A = \left[ \mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m \right] \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí

$$\begin{aligned} E_R A &= E_R \left[ \mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m \right] \\ &= \left[ E_R \mathbf{a}_1 \quad \dots \quad E_R \mathbf{a}_m \right] \\ &= \left[ f_R(\mathbf{a}_1) \quad \dots \quad f_R(\mathbf{a}_m) \right], \end{aligned}$$

což je právě matice, kterou získáme provedením elementární řádkové úpravy  $R$  na matici  $A$ .

## Tvrzení 16

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  je matice. Pak platí:

- Ⓐ je-li  $E$  elementární matice příslušná elementární řádkové úpravě  $R$  na maticích s  $n$  řádky, pak matice získaná provedením  $R$  na matici  $A$  je rovna matici  $EA$ ;
- Ⓑ jsou-li  $E_1, \dots, E_k$  elementární matice příslušné elementárním řádkovým úpravám  $R_1, \dots, R_k$  respektive na maticích s  $n$  řádky, pak matice získaná postupným provedením  $R_1, \dots, R_k$  (v právě tom pořadí) na matici  $A$  je rovna matici  $E_k \dots E_1 A$ .

*Důkaz (nástin).* Část (a) plyne z diskuse na předchozích dvou slajdech. Část (b) plyne z (a) pomocí jednoduché indukce. Schématicky máme:

$$A \stackrel{R_1}{\sim} E_1 A \stackrel{R_2}{\sim} E_2 E_1 A \stackrel{R_3}{\sim} E_3 E_2 E_1 A \stackrel{R_4}{\sim} \dots \stackrel{R_k}{\sim} E_k \dots E_3 E_2 E_1 A.$$



- **Připomenutí:** Všechny elementární řádkové úpravy jsou vratné:

- 1 úprava „ $R_i \leftrightarrow R_j$ ” zvrátí sama sebe (aplikujeme-li tuto úpravu dvakrát, dostaneme původní matici);
- 2 úpravu „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ” ( $\alpha \neq 0$ ) lze zvrátit úpravou „ $R_i \rightarrow \alpha^{-1} R_i$ ”;
- 3 úpravu „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ” ( $i \neq j$ ) lze zvrátit úpravou „ $R_j \rightarrow R_j - \alpha R_i$ ”.

## Tvrzení 17

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓐ elementární matice jsou regulární;
- Ⓑ inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární;
- Ⓒ čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární právě tehdy, když existují elementární matice  $E_1, \dots, E_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.  
 $A = E_1 \dots E_k$  (tj. matice je regulární právě tehdy, když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic).

*Důkaz.* Části (a) a (b) dokážeme najednou, zatímco část (c) dokážeme zvlášť.

## Tvrzení 17

- Ⓐ elementární matice jsou regulární;
- Ⓑ inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární;

*Důkaz (pokračování).* Dokažme (a) a (b). Nechť  $E$  je elementární matice příslušná elementární řádkové úpravě  $R$  na maticích s  $n$  řádky. Nechť  $R'$  je elementární řádková úprava, která zvrátí  $R$ , a nechť  $E'$  je elementární matice příslušná  $R'$ .

Nyní si všimneme, že platí:

$$I_n \stackrel{R}{\sim} EI_n \stackrel{R'}{\sim} \underbrace{E'EI_n}_{=E'E} \stackrel{\text{protože } R' \text{ zvrátí } R}{\equiv} I_n,$$

a tedy  $E'E = I_n$ . Podobně platí  $EE' = I_n$ .

Dokázali jsme, že  $E'E = EE' = I_n$ . Nyní vyplývá z definice regulární matice, že elementární matice  $E$  je regulární a  $E^{-1} = E'$ . Tím jsme dokázali (a) a (b).

## Tvrzení 12

- Ⓔ jsou-li matice  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  regulární, pak je i matice  $A_1 \dots A_k$  regulární, a navíc platí  $(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$ ;

## Tvrzení 17

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓐ elementární matice jsou regulární;
- Ⓑ inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární;
- Ⓒ čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární právě tehdy, když existují elementární matice  $E_1, \dots, E_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.  $A = E_1 \dots E_k$  (tj. čtvercová matice je regulární právě tehdy, když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic).

*Důkaz (pokračování).* Zbývá dokázat (c). Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$

Lze-li vyjádřit matici  $A$  jako součin elementárních matic, pak plyne z části (b) a z Tvrzení 12(e), že  $A$  je regulární.

## Tvrzení 17

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- Ⓒ elementární matice jsou regulární;
- Ⓓ inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární;
- Ⓔ čtvercová matice  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je regulární právě tehdy, když existují elementární matice  $E_1, \dots, E_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.  $A = E_1 \dots E_k$  (tj. čtvercová matice je regulární právě tehdy, když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic).

*Důkaz (pokračování).* Předpokládejme nyní, že  $A$  je regulární. Pak dle Věty 14 platí  $\text{RREF}(A) = I_n$ . Tedy  $I_n \sim A$ , tj. existují elementární řádkové úpravy  $R_1, \dots, R_k$ , jejichž provedením (v tomto pořadí) na jednotkové matici  $I_n$  získáme matici  $A$ .

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ : necht  $E_i$  je elementární matice příslušná elementární řádkové úpravě  $R_i$ .

Pak plyne z Tvrzení 16(c), že  $E_k \dots E_1 I_n = A$ , neboli  $E_k \dots E_1 = A$ .  $\square$

## Věta 18

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$  jsou matice. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (a)  $A \sim B$ ;
- (b) existují elementární matice  $E_1, \dots, E_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.  
 $B = E_1 \dots E_k A$ ;
- (c) existuje regulární matice  $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.  $B = CA$ .

*Důkaz.* Dle definice je (a) ekvivalentní s:

- (a') existují elementární řádkové úpravy  $R_1, \dots, R_k$  na maticích s  $n$  řádky, jejichž provedením na matici  $A$  (v tomto pořadí) získáme matici  $B$ .

Dle Tvrzení 16(b) jsou (a') a (b) ekvivalentní.

Dle Tvrzení 17(c) je matice regulární právě tehdy, když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic. Tedy (b) a (c) jsou ekvivalentní.  $\square$

- Konečně můžeme dokázat Větu 11:

### Věta 11

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Položme  $[ U \mid B ] = \text{RREF}([ A \mid I_n ])$ .<sup>a</sup> Pak platí:

- Ⓐ jestliže  $U = I_n$ , pak je  $A$  regulární a  $A^{-1} = B$ ;
- Ⓑ jestliže  $U \neq I_n$ , pak je  $A$  singulární (tj.  $A$  není regulární).

---

<sup>a</sup>Tady jsou  $B$  a  $U$  čtvercové matice typu  $n \times n$ .

*Důkaz.* Jelikož  $[ U \mid B ] = \text{RREF}([ A \mid I_n ])$ , platí  $\text{RREF}(A) = U$ .

Dle Věty 14 je matice  $A$  regulární právě tehdy, když  $\text{RREF}(A) = I_n$ . Plyne, že  $A$  je regulární právě tehdy, když  $U = I_n$ .

Zbývá dokázat, že platí-li  $U = I_n$ , pak  $B = A^{-1}$ .

Předpokládejme tedy, že  $U = I_n$ . (Tedy je  $A$  regulární.) Pak platí, že  $\text{RREF}([ A \mid I_n ]) = [ I_n \mid B ]$ , a že  $\text{RREF}(A) = I_n$ . Je třeba dokázat, že  $B = A^{-1}$ .

## Věta 11

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je čtvercová matice (kde  $\mathbb{F}$  je těleso). Položme  $[U \mid B] = \text{RREF}([A \mid I_n])$ .<sup>a</sup> Pak platí:

- Ⓐ jestliže  $U = I_n$ , pak je  $A$  regulární a  $A^{-1} = B$ ;
- Ⓑ jestliže  $U \neq I_n$ , pak je  $A$  singulární (tj.  $A$  není regulární).

---

<sup>a</sup>Tady jsou  $B$  a  $U$  čtvercové matice typu  $n \times n$ .

*Důkaz (pokračování).* Jelikož  $[A \mid I_n] \sim [I_n \mid B]$ , plyne z Věty 18, že existuje regulární matice  $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  t.ž.

$C[A \mid I_n] = [I_n \mid B]$ . Tedy

$$[I_n \mid B] = C[A \mid I_n] = [CA \mid CI_n] = [CA \mid C].$$

Plyne z toho, že  $CA = I_n$  a že  $B = C$ . Tedy  $BA = I_n$ . Jelikož už víme, že  $A$  je regulární, plyne z Tvzení 10 níže, že  $A^{-1} = B$ .  $\square$

## Tvrzení 10

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Necht  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  jsou čtvercové matice t.ž.  $A$  je regulární a zároveň platí  $AB = I_n$  nebo  $BA = I_n$ . Pak  $A^{-1} = B$ .

- Nyní dáme dohromady hlavní výsledky této přednášky, abychom dostali „Větu o regulárních maticích (v.1)”.
- Věta uvádí velký počet tvrzení, která jsou ekvivalentní tvrzení, že je daná čtvercová matice regulární.
- Tato věta je poměrně dlouhá a postupně ji budeme dále rozšiřovat (během tohoto a příštího semestru).
- Formální důkaz neuvádíme, ale v podstatě všechno jednoduše plyne z vět/tvrzení/důsledků, které jsme už dokázali.
  - Pro formální detaily viz skripta (Penev – oddíl 1.11.7).
- **Pozor:** Věta o regulárních maticích platí pouze pro **čtvercové** matice!
  - Nepoužívejte ji pro obecné matice (tj. matice, které nejsou nutně čtvercové).

## Věta o regulárních maticích (v.1)

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso a  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je **čtvercová** matice. Nechť je dáno zobrazení  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  předpisem  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ .<sup>a</sup> Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- a)  $A$  je regulární (tj.  $A$  má inverzní matici);
- b)  $A^T$  je regulární;
- c)  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- d)  $\text{RREF}([A \mid I_n]) = [I_n \mid B]$  pro nějakou matici  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ;
- e)  $\text{rank}(A) = n$ ;
- f)  $\text{rank}(A^T) = n$ ;
- g)  $A$  je součin elementárních matic;

---

<sup>a</sup>Jelikož je  $f$  maticové zobrazení, plyne z Tvrzení 3 z Přednášky č.4, že  $f$  je lineární. Navíc je  $A$  maticí lineárního zobrazení  $f$  v.k.k.b.

## Věta o regulárních maticích (v.1) - pokračování

- h) homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ );
- i) existuje vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  t.ž. rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má právě jedno řešení;
- j) pro každý vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení;
- k) pro každý vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení;
- l) pro každý vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná;
- m) zobrazení  $f$  je prosté;
- n) zobrazení  $f$  je na;
- o) zobrazení  $f$  je isomorfismus.