

Lineární algebra 1

Přednáška č.4

Maticové rovnice typu $AX = B$ a $XA = B$. První
pohled na lineární zobrazení

Irena Penev

22.10.2025

Během příštích několika týdnů (dokud neprobereme tělesa formálně, tj. axiomaticky) budeme předpokládat, že uvažované těleso \mathbb{F} je jedno z následujících: \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} nebo \mathbb{Z}_p (kde p je prvočíslo). Nicméně, všechno, co dokážeme během těchto přednášek, bude platit pro libovolná tělesa \mathbb{F} , nejen pro tato čtyři.

- **Pozor:** Následující množiny **nejsou** tělesa: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_n (kde $n \in \mathbb{N}$ **není** prvočíslo).

Tato přednáška má tři části:

- 1 Lineární kombinace (ještě jednou)
- 2 Maticové rovnice typu $AX = B$ a $XA = B$
- 3 První pohled na lineární zobrazení: lineární zobrazení mezi \mathbb{F}^m a \mathbb{F}^n

- 1 Lineární kombinace (ještě jednou)
- Připomenutí:

Definice

Nechť \mathbb{F} je těleso. *Lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ z \mathbb{F}^n rozumíme libovolný vektor, který získáme sčítáním jejich skalárních násobků, tj. libovolný vektor, který lze vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou skaláry v tělese \mathbb{F} .

- Připomenutí:

Definice

Lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ z \mathbb{F}^n (kde \mathbb{F} je těleso), značený $\text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\})$ nebo jednoduše $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů, tedy

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}.$$

- Připomenutí:

Definice

Nechť \mathbb{F} je těleso. Pro matici $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$, kde

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

definujeme součin $A\mathbf{x}$ takto:

$$A\mathbf{x} := \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{a}_i = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m.$$

- Tedy je $A\mathbf{x}$ lineární kombinací sloupců matice A , přičemž jsou skaláry před sloupci určeny složkami vektoru \mathbf{x} .

- Pro těleso \mathbb{F} a vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ platí:

\mathbf{b} je lineární
kombinací
vektorů
 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$

\iff

$$\exists x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F} \text{ t.ž.} \\ x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

\iff

$$\exists x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F} \text{ t.ž.} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{=: A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

\iff

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \text{ t.ž. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

\iff

rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešitelná

Příklad

Uvažujme následující vektory (jejichž složky jsou reálná čísla):

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Určeme zda $\mathbf{b} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Položme

$A := [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme

$$\text{RREF}([\ A \ | \ \mathbf{b} \]) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

a tedy je obecné řešení rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t - 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Příklad (pokračování)

Připomenutí: Obecné řešení rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t - 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešitelná, a proto $\mathbf{b} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, tj. \mathbf{b} je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Pro každou hodnotu parametru t dostáváme vyjádření \mathbf{b} jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Např.:

- $\mathbf{b} = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ (pro $t = 0$);
- $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ (pro $t = 1$);
- $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ (pro $t = -2$).

Kvůli parametru t (který může nabývat nekonečně mnoha hodnot, protože těleso \mathbb{R} je nekonečné) lze vektor \mathbf{b} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů nekonečně mnoha způsoby.

Příklad (pokračování)

Pokud potřebujeme pouze jedno vyjádření vektoru \mathbf{b} jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, lze to udělat tím, že ignorujeme nebázické sloupce nalevo od svislé tečkované čáry.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{array} \right]}_{= [A \mid \mathbf{b}]} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = \text{RREF}([A \mid \mathbf{b}])$$

Dostáváme následující vyjádření vektoru \mathbf{b} jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{b} = (-1)\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$$

Kvůli tomu, že jsme nalevo od svislé tečkované čáry měli nebázický sloupec, který odpovídá parametru (tj. volné proměnné), naše vyjádření vektoru \mathbf{b} jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ není jediné.

Příklad

Uvažujme následující vektory (jejichž složky patří do tělesa \mathbb{Z}_3):

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pro každý z vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ určete, zda je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, a pokud ano, vyjádřete jej jako lineární kombinaci těchto vektorů a rozhodněte, zda je toto vyjádření jediné.

Řešení. Položme

$$A := [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Je třeba rozhodnout, zda jsou následující rovnice řešitelné: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}$.

Lze to udělat tím, že vypočítáme RREF jejich rozšířených matic, tj. matic $[A \mid \mathbf{b}]$, $[A \mid \mathbf{c}]$, $[A \mid \mathbf{d}]$, $[A \mid \mathbf{e}]$.

Upravování matic je časově náročné, a proto se pokusíme upravit všechny čtyři matice naráz tím, že upravíme matici

$$[A \mid \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{e}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Řešení (pokračování). Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{RREF}([A' \mid \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{e}]) &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &=: [A' \mid \mathbf{b}' \ \mathbf{c}' \ \mathbf{d}' \ \mathbf{e}']. \end{aligned}$$

Platí $[A' \mid \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{e}] \sim [A' \mid \mathbf{b}' \ \mathbf{c}' \ \mathbf{d}' \ \mathbf{e}']$, a proto:

- $[A' \mid \mathbf{b}] \sim [A' \mid \mathbf{b}']$;
- $[A' \mid \mathbf{c}] \sim [A' \mid \mathbf{c}']$;
- $[A' \mid \mathbf{d}] \sim [A' \mid \mathbf{d}']$;
- $[A' \mid \mathbf{e}] \sim [A' \mid \mathbf{e}']$.

(Vskutku, aplikujeme-li posloupnost elementárních řádkových úprav, kterou jsme aplikovali na matici $[A' \mid \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{e}]$, abychom dostali matici $[A' \mid \mathbf{b}' \ \mathbf{c}' \ \mathbf{d}' \ \mathbf{e}']$, na matici $[A' \mid \mathbf{b}]$ dostaneme matici $[A' \mid \mathbf{b}']$; podobně to platí pro ostatní tři páry matic.)

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\begin{aligned} \text{RREF}([A \mid \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{e}]) &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &=: [A' \mid \mathbf{b}' \ \mathbf{c}' \ \mathbf{d}' \ \mathbf{e}']. \end{aligned}$$

Platí $[A \mid \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d} \ \mathbf{e}] \sim [A' \mid \mathbf{b}' \ \mathbf{c}' \ \mathbf{d}' \ \mathbf{e}']$, a proto:

- $[A \mid \mathbf{b}] \sim [A' \mid \mathbf{b}']$;
- $[A \mid \mathbf{c}] \sim [A' \mid \mathbf{c}']$;
- $[A \mid \mathbf{d}] \sim [A' \mid \mathbf{d}']$;
- $[A \mid \mathbf{e}] \sim [A' \mid \mathbf{e}']$.

Vidíme, že rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $A\mathbf{x} = \mathbf{e}$ jsou řešitelné, zatímco rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ a $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ řešitelné nejsou. Plyne, že

$\mathbf{b}, \mathbf{e} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, zatímco $\mathbf{c}, \mathbf{d} \notin \text{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$.

Zbývá ještě vyjádřit \mathbf{b} a \mathbf{e} jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$.

Řešení (pokračování). Abychom vyjádřili \mathbf{b} a \mathbf{e} jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, ignorujeme nebázické sloupce vlevo od svislé tečkované čáry:

$$\text{RREF}([A \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{d} \mid \mathbf{e}]) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Plyne, že:

- $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$;
- $\mathbf{e} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$.

Jelikož jsme měli nebázické sloupce nalevo od svislé tečkované čáry (tyto sloupce odpovídají parametrům, tj. volným proměnným), tato vyjádření vektorů \mathbf{b} a \mathbf{e} jako lineárních kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ nejsou jediná. \square

- Pro více příkladů viz skripta (Penev, oddíl 1.5.1).

2 Maticové rovnice typu $AX = B$ a $XA = B$

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

jejichž prvky jsou reálná čísla. Vyřešte rovnici $AX = B$.^a Kolik řešení má rovnice $AX = B$?

^aVšimněme si, že řešení rovnice $AX = B$ jsou reálné matice typu 4×2 .

- Podíváme se na dvě řešení příkladu.
 - První je zcela transparentní (mělo by být ihned jasné, proč funguje).
 - Druhé je kratší: je podobné tomu prvnímu, ale budeme upravovat pouze jednu matici místo dvou.

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

jejichž prvky jsou reálná čísla. Vyřešte rovnici $AX = B$.^a Kolik řešení má rovnice $AX = B$?

^aVšimněme si, že řešení rovnice $AX = B$ jsou reálné matice typu 4×2 .

Řešení č.1. Položme $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Pak platí $AX = A \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$, a proto je rovnice $AX = B$ ekvivalentní s

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Je třeba vyřešit rovnice $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ a $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ (proměnné jsou vektory \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2).

Řešení č.1 (pokračování). Nejdřív vyřešíme rovnici $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$.
Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\left[A \mid \mathbf{b}_1 \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{4} & \frac{35}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{13}{4} \end{array} \right]}_{= \text{RREF}(\left[A \mid \mathbf{b}_1 \right])}$$

Obecné řešení rovnice $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ je:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{31}{4}s + \frac{35}{4} \\ -3s + 3 \\ \frac{13}{4}s - \frac{13}{4} \\ s \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

Řešení č.1 (pokračování). Nyní vyřešíme rovnici $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$.
Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\left[A \mid \mathbf{b}_2 \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right]}_{=\text{RREF}(\left[A \mid \mathbf{b}_2 \right])}.$$

Obecné řešení rovnice $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ je:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{31}{4}t \\ -3t \\ \frac{13}{4}t + 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Řešení č.1 (pokračování). Nyní vyčteme obecné řešení pro $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{31}{4}s + \frac{35}{4} & -\frac{31}{4}t \\ -3s + 3 & -3t \\ \frac{13}{4}s - \frac{13}{4} & \frac{13}{4}t + 1 \\ s & t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož naše řešení má parametry (volné proměnné) a těleso \mathbb{R} je nekonečné, má rovnice $AX = B$ nekonečně mnoho řešení. \square

- **Důležité:** Když řešíme rovnici $AX = B$, různé sloupce řešení pro X nesmějí mít stejné parametry!
 - V příkladu výše máme v prvním sloupci parametr s , zatímco ve druhém parametr t .

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

jejichž prvky jsou reálná čísla. Vyřešte rovnici $AX = B$.^a Kolik řešení má rovnice $AX = B$?

^aVšimněme si, že řešení rovnice $AX = B$ jsou reálné matice typu 4×2 .

- V našem řešení č.1 jsme upravovali dvě matice:

$$[A \mid \mathbf{b}_1] \quad \text{a} \quad [A \mid \mathbf{b}_2],$$

$$\text{kde } B = [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2].$$

- Upravování matic je časově náročné!
- V našem řešení č.2 se pokusíme upravit obě matice naráz tím, že přímo upravíme matici $[A \mid B] = [A \mid \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]$.

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

jejichž prvky jsou reálná čísla. Vyřešte rovnici $AX = B$.^a Kolik řešení má rovnice $AX = B$?

^aVšimněme si, že řešení rovnice $AX = B$ jsou reálné matice typu 4×2 .

Řešení č.2. Uvažujme matici

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right].$$

Řešení č.2. Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}\left([A \mid B] \right) = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{4} & \frac{35}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right].$$

Nyní vyčteme sloupce neznámé matice X jeden po druhém.

- **První sloupec** matice X vyčteme tak, že vyčteme řešení rovnice, jejíž rozšířenou maticí je matice tvořená podmaticí nalevo od svislé tečkované čáry a zároveň **prvním sloupcem napravo** od svislé tečkované čáry.
- **Druhý sloupec** matice X vyčteme podobně, ale soustředíme se na **druhý sloupec napravo** od svislé tečkované čáry (místo **prvního**).

Řešení č.2 (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[A \mid B \right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} \end{array} \right].$$

Obecné řešení matice $AX = B$ je

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{31}{4}s + \frac{35}{4} & -\frac{31}{4}t \\ -3s + 3 & -3t \\ \frac{13}{4}s - \frac{13}{4} & \frac{13}{4}t + 1 \\ s & t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož naše řešení má parametry (volné proměnné) a těleso \mathbb{R} je nekonečné, má rovnice $AX = B$ nekonečně mnoho řešení. \square

- **Postup pro řešení maticových rovnic typu $AX = B$:**

- Předpokládejme, že jsou dány matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, kde \mathbb{F} je nějaké těleso, a potřebujeme vyřešit rovnici $AX = B$.
 - Pozor: matice A a B musí mít stejný počet řádků. Počet sloupců se může lišit.
 - Každé řešení pro X bude maticí typu $m \times p$.
 - Nejdříve vypočítáme $\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right]\right)$.
 - Dostaneme-li řádek tvaru $\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{array} \right]$, kde je alespoň jedna $*$ nenulová, rovnice $AX = B$ není řešitelná.
 - Např. dostaneme-li řádek $\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$, pak neexistují žádná řešení pro **druhý** a **čtvrtý** sloupec matice X .
 - Předpokládejme nyní, že jsme žádný takový řádek nedostali. Pak je rovnice $AX = B$ řešitelná.
 - Sloupce řešení matice X vyčteme jeden po druhém.
 - Pro každý index sloupce $j \in \{1, \dots, p\}$ je j -tý sloupec matice X řešením rovnice, jejíž rozšířenou maticí je matice tvořená podmaticí $\text{RREF}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right]\right)$ nalevo od svislé tečkované čáry a j -tým sloupcem napravo od svislé tečkované čáry.
- Pozor: různé sloupce řešení matice X nesmějí mít žádný společný parametr!

• Připomenutí:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{red}\blacklozenge \\ \color{blue}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{blue}\blacklozenge \\ \color{green}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{green}\blacklozenge \\ \color{purple}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{purple}\blacklozenge \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} \color{red}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{red}\blacklozenge \\ \color{blue}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{blue}\blacklozenge \\ \color{green}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{green}\blacklozenge \\ \color{purple}\blacklozenge & * & * & * & * & \color{purple}\blacklozenge \end{bmatrix}$$

Tvrzení 14 z Přednášky 3

Pro libovolné matice A, B a libovolný skalár α platí následující (za předpokladu, že matice jsou pro danou operaci vhodného typu a že prvky našich matic i skalár patří do stejného tělesa \mathbb{F}):

- Ⓐ $(A^T)^T = A;$

Ⓑ $(A + B)^T = A^T + B^T;$
- Ⓒ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Ⓓ $(AB)^T = B^T A^T.$

• Maticovou rovnici typu $XA = B$ řešíme takto:

- Nejdříve transpozicí obou stran rovnice a dostaneme $A^T X^T = B^T$.
- Poté vyřešíme rovnici $A^T X^T = B^T$ pro X^T .
- Nakonec transponujeme naše řešení pro X^T , abychom dostali řešení pro X .

Příklad

Uvažujme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

s prvky z tělesa \mathbb{Z}_5 . Vyřešte rovnici $XA = B$.^a Kolik řešení má rovnice $XA = B$?

^aVšimněme si, že řešení rovnice $XA = B$ jsou matice typu 2×3 s prvky z tělesa \mathbb{Z}_5 .

Řešení. Všimněme si, že: $XA = B \iff A^T X^T = B^T$.

Nejdříve vyřešíme rovnici $A^T X^T = B^T$ pro X^T . Uvažujme matici:

$$\left[A^T \mid B^T \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Řešení (pokračování). Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$\text{RREF}\left(\left[A^T \mid B^T \right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Obecné řešení matice $A^T X^T = B^T$ pro X^T je:

$$X^T = \begin{bmatrix} 4s + 2 & 4t + 1 \\ 3s + 4 & 3t + 1 \\ s & t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{Z}_5.$$

Obecné řešení rovnice $XA = B$ je:

$$X = \begin{bmatrix} 4s + 2 & 3s + 4 & s \\ 4t + 1 & 3t + 1 & t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{Z}_5.$$

Naše obecné řešení rovnice $XA = B$ má 2 parametry (konkrétně s, t), zatímco těleso \mathbb{Z}_5 má 5 prvků. Plyne, že rovnice $XA = B$ má $5^2 = 25$ řešení. \square

- Pro více příkladů viz skripta (Penev, oddíl 1.9).

- ③ První pohled na lineární zobrazení: lineární zobrazení mezi \mathbb{F}^m a \mathbb{F}^n

Definice

Nechť \mathbb{F} je těleso. Zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je *lineární* pokud platí:

- 1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m: f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v});$
- 2 $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m, \alpha \in \mathbb{F}: f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

Tvrzení 1

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak pro všechny vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^m$ a skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ platí:

$$f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{v}_k).$$

Důkaz (nástin). Plyne z definice lineárního zobrazení pomocí jednoduché indukce podle k . \square

Příklad

Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární (a dokažte své tvrzení).

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

b) $g : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^4$ definované předpisem

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

c) $h : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ definované předpisem $h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_3.$$

- **Poznámka:**

- Chceme-li dokázat, že dané zobrazení **je lineární**, musíme dokázat, že **splňuje oba axiomy** z definice lineárního zobrazení.
- Chceme-li dokázat, že dané zobrazení **není lineární**, stačí dokázat, že **nesplňuje jeden ze dvou axiomů** z definice.

Příklad

(a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Řešení. (a) Tvrdíme, že zobrazení f je lineární. Své tvrzení dokážeme tím, že ukážeme, že f splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení.

1. Nechť $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ jsou vektory z \mathbb{R}^3 . Dokažme, že $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$. K tomu spočítáme (na následujícím slajdu):

Řešení (pokračování).

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (u_1 - u_2 + u_3) + (v_1 - v_2 + v_3) \\ (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{(**)}{=} f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$

kde (*) a (**) plynou z definice zobrazení f .

Řešení (pokračování). 2. Nechť $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ je vektor z \mathbb{R}^3 a $\alpha \in \mathbb{R}$ je skalár. Dokažme, že $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$. K tomu spočítáme:

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u}) &= f\left(\alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{bmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 + \alpha u_3 \\ \alpha u_1 + \alpha u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(u_1 - u_2 + u_3) \\ \alpha(u_1 + u_2) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} \stackrel{(**)}{=} \alpha f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha f(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

kde (*) a (**) plynou z definice zobrazení f .

Dokazali jsme, že f splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení. Plyne, že zobrazení f je lineární. \square

Příklad

(b) $g : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^4$ definované předpisem

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

Řešení. (b) Tvrdíme, že zobrazení g nespĺňuje axiom 1 z definice lineárního zobrazení, a proto g není lineární.

Abychom toto dokázali, uvažujme např. vektory $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ z \mathbb{Z}_2^2 a všimněme si, že (na následujícím slajdu):

Řešení (pokračování).

$$g(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zatímco

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) &= g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Plyne, že $g(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})$, a proto g není lineární. \square

Příklad

© $h : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ definované předpisem $h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$
 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_3$.

Řešení. (c) Tvrdíme, že zobrazení h nespĺňuje axiom 2 z definice lineárního zobrazení, a proto h není lineární. Abychom toto

dokázali, uvažujme např. vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ z \mathbb{Z}_3^3 a skalár $\alpha = 2$ z

\mathbb{Z}_3 a všimněme si, že

- $h(\alpha\mathbf{u}) = h\left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$;
- $\alpha h(\mathbf{u}) = 2h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \begin{bmatrix} 1+2 \\ 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tedy $h(\alpha\mathbf{u}) \neq \alpha h(\mathbf{u})$, a plyne, že h není lineární. \square

Tvrzení 2

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak platí $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.^a

^aV rovnosti $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ máme $\mathbf{0} \in \mathbb{F}^m$ a $\mathbf{0} \in \mathbb{F}^n$.

Proof. Všimněme si, že

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) \stackrel{(*)}{=} 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

kde (*) plyne z linearitity zobrazení f . \square

- **Poznámka:** Tvrzení 2 lze občas použít, abychom dokázali, že dané zobrazení není lineární.

Tvrzení 2

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak platí $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Příklad

ⓑ $g : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^4$ definované předpisem

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

- Např. zobrazení g (výše) není lineární, protože $g(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.
- Upozorněme však, že obrácené tvrzení k tvrzení 2 neplatí: může nastat, že zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ (kde \mathbb{F} je nějaké těleso) splňuje $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ale přesto není lineární.

Tvrzení 2

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak platí $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Příklad

• $h : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ definované předpisem $h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_3$.

- Např. pro zobrazení h (výše) platí $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, přestože h není lineární (což jsme už dokázali).

- **Poznámka:** Geometricky vzato lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazuje přímky na přímky nebo na body, což je jedním z důvodů pro označení „lineární“.
 - Formální důkaz vynecháváme, ale můžete si ho přečíst ve skriptech (Penev, oddíl 1.10.2 — nepovinná četba).
- Jak jsme viděli (Tvrzení 2), lineární zobrazení zároveň zobrazuje počátek na počátek.
- **Pozor:** Ne všechna zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, která zobrazují přímky na přímky nebo na body, a zároveň zobrazují počátek na počátek, jsou lineární!

Tvrzení 3

Nechť \mathbb{F} je těleso, necht' $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a definujme zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$. Pak je f lineární zobrazení.

Důkaz. Podle základních vlastností součinu matice a vektoru platí:

- ⓪ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m: A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v};$
- Ⓛ $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m, \alpha \in \mathbb{F}: A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(A\mathbf{u}).$

Plyne, že:

- 1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m:$

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \stackrel{(i)}{=} A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v});$$

- 2 $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}^m, \alpha \in \mathbb{F}:$

$$f(\alpha\mathbf{u}) = A(\alpha\mathbf{u}) \stackrel{(ii)}{=} \alpha(A\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$$

Tím jsme dokázali, že f je lineární. \square

Tvrzení 3

Nechť \mathbb{F} je těleso, necht' $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a definujme zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$. Pak je f lineární zobrazení.

- Zobrazení tvaru $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, kde A je nějaká pevně daná matice, se občas nazývá *maticovým zobrazením*.
- Dle Tvrzení 3, maticová zobrazení jsou lineární. Zkusme popsat maticová zobrazení trochu podrobněji.
- Předpokládejme, že $A = [a_{i,j}]_{n \times m}$ je nějaká matice v $\mathbb{F}^{n \times m}$ (kde \mathbb{F} je nějaké těleso), a definujme zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.
- Nyní pro každý vektor $\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_m]^T$ z \mathbb{F}^m platí (na následujícím slajdu):

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- Naše maticové zobrazení tedy každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ přiřazuje vektor v \mathbb{F}^n , jehož každá složka je lineární kombinací složek vektoru \mathbf{x} , přičemž koeficienty této kombinace jsou dány příslušným řádkem matice A .

- **Připomenutí:** Necht' \mathbb{F} je těleso. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ označme \mathbf{e}_i^n vektor v \mathbb{F}^n , jehož i -tá složka je 1, zatímco všechny ostatní složky jsou nulové.

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-tá složka}$$

- Je-li n jasné z kontextu, vynecháváme horní index n a píšeme prostě $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ namísto $\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_n^n$, respektive.
- Vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ nazýváme *kanonickými jednotkovými vektory*, zatímco množinu $\mathcal{E}_n := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ nazýváme *kanonickou bází* prostoru \mathbb{F}^n .

- **Připomenutí:**

Tvrzení 2 z Přednášky 3

Nechť \mathbb{F} je těleso. Pro každou matici $A = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m] \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a každý index $i \in \{1, \dots, m\}$ platí $A\mathbf{e}_i^m = \mathbf{a}_i$.

- **Poznámka:** Tvrzení 2 říká, že vynásobení matice A i -tým kanonickým jednotkovým vektorem dává i -tý sloupec původní matice A .

Tvrzení 3

Nechť \mathbb{F} je těleso, necht' $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ je matice a definujme zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$. Pak je f lineární zobrazení.

- Podle Tvrzení 3 je každé maticové zobrazení lineární.
- Zajímavé však je, že v jistém smyslu platí i obrácené tvrzení.

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)],$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

- Terminologie: Matice A se nazývá *maticí lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím*.
 - Terminologii vysvětlíme později (za několik týdnů).

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)],$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

- Nejdříve se podíváme na příklad, pak uvedeme a dokážeme jinou větu (Větu 5), pak použijeme Větu 5, abychom dokázali Větu 4.

Příklad

Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

(V minulém příkladu jsme dokázali, že f je lineární.) Vypočítejte matici lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení. Následující matice je maticí lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím:

$$A := [f(\mathbf{e}_1) \quad f(\mathbf{e}_2) \quad f(\mathbf{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

- Vskutku, pro každý vektor $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ platí:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}).$$

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Necht $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- **Poznámka:** Věta 5 v podstatě říká, že lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ (kde \mathbb{F} je nějaké těleso) můžeme zcela určit tím, že určíme obrazy kanonických jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ z \mathbb{F}^m .
 - Navíc tyto obrazy (vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ z Věty 5) můžeme zvolit libovolně: můžeme tedy kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m poslat na libovolné vektory v \mathbb{F}^n .

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Např. pro vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ z \mathbb{R}^2 , existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.ž. $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2, f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{a}_3$. Toto f je dáno předpisem

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3.$$

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

Důkaz. Existence. Potřebujeme sestavit zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$.

Definujme zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m.$$

Zobrazení f je maticové, a tedy lineární (dle Tvzení 3). Navíc pro každý index $i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$f(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \stackrel{(*)}{=} \mathbf{a}_i,$$

kde (*) plyne z Tvzení 2 z Přednášky 3.

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

Důkaz (pokračování). **Jednoznačnost.** Nechť $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je **libovolné** lineární zobrazení, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$.

Potřebujeme dokázat, že platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

Nechť $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix}^T$ je libovolný vektor z \mathbb{F}^m . Pak platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m,$$

a spočítáme (na následujícím slajdu):

Důkaz (pokračování). Připomenutí: $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m) \\ &\stackrel{(*)}{=} x_1f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_mf(\mathbf{e}_m) \\ &\stackrel{(**)}{=} x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_m\mathbf{a}_m \\ &\stackrel{(***)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde (*) plyne z linearity zobrazení f , (**) plyne z faktu, že $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, zatímco (***) plyne z definice součinu matice a vektoru. \square

- Dokázali jsme:

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Necht $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Nyní dokažme:

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_m) \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)],$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

Důkaz. Existence. Položme $\mathbf{a}_1 := f(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{a}_m := f(\mathbf{e}_m)$ a

$$A := [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m] = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)].$$

Podle Věty 5 platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Vskutku, $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$.
- Tedy dle Věty 4 platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

Tím je dokázána existence.

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)],$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

Důkaz. Jednoznačnost. Nechť $B = [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m]$ je libovolná matice z $\mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$. Potřebujeme dokázat, že $B = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)]$.

Všimněme si, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$f(\mathbf{e}_i) = B\mathbf{e}_i \stackrel{(*)}{=} \mathbf{b}_i$$

kde (*) plyne z Tvrzení 2 z Přednášky 3. Tedy

$$B = [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m] = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)].$$

Tím je dokázána jednoznačnost. \square

Věta 4

Nechť \mathbb{F} je těleso a $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární zobrazení. Pak existuje jediná matice $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ platí $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Navíc je tato matice A dána vzorcem

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_m)],$$

kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m .

- Terminologie: Matice A se nazývá *maticí lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím*.

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m]$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

Definice

Pro libovolnou množinu X je *identické zobrazení* na X zobrazení $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ definované předpisem $\text{Id}_X(x) = x$ pro všechna $x \in X$.

- Připomenutí:

$$\begin{aligned} I_n &:= [\mathbf{e}_1^n \quad \dots \quad \mathbf{e}_n^n] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

Tvrzení 6

Nechť \mathbb{F} je těleso. Pak je identické zobrazení $\text{Id}_{\mathbb{F}^n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ lineární a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je jednotková matice I_n .

Tvrzení 6

Nechť \mathbb{F} je těleso. Pak je identické zobrazení $\text{Id}_{\mathbb{F}^n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ lineární a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je jednotková matice I_n .

Důkaz. Je zřejmé, že $\text{Id}_{\mathbb{F}^n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ splňuje oba axiomy z definice lineárního zobrazení, a tedy je $\text{Id}_{\mathbb{F}^n}$ lineární. Podle Věty 4 jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je

$$\left[\text{Id}_{\mathbb{F}^n}(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad \text{Id}_{\mathbb{F}^n}(\mathbf{e}_n) \right] = \left[\mathbf{e}_1 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n \right] = I_n. \quad \square$$

Věta 5

Nechť \mathbb{F} je těleso. Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou libovolné vektory z \mathbb{F}^n a položme $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$. Pak existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, které splňuje $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \mathbf{a}_m$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ jsou kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m . Navíc je toto lineární zobrazení f dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$.

- Dle Věty 5 lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ (kde \mathbb{F} je nějaké těleso) lze určit tím, že určíme obrazy kanonických jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ z \mathbb{F}^m .
 - Navíc tyto obrazy (vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ z Věty 5) můžeme zvolit libovolně: můžeme tedy kanonické jednotkové vektory z \mathbb{F}^m poslat na libovolné vektory v \mathbb{F}^n .
- Co když máme nějaké vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{F}^m$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^n$ (přičemž $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ nemusí být kanonické jednotkové vektory)?
 - Musí existovat lineární zobrazení $f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ t.ž. platí $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \dots, f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}_k$?
 - Ne vždycky! (Záleží na vektorech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.)

- Např. uvažujme následující reálné vektory:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Pak **neexistuje** žádné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.ž.
 $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2, f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3.$
- Vskutku, kdyby takové lineární zobrazení f existovalo, pak by platilo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_3) &= f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) && \text{protože } \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ &= 2f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2) && \text{dle linearity} \\ &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ &\neq \mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

což je spor.

Příklad

Rozhodněte, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$, které splňuje:

- $f([1 \ 2 \ 1 \ 2]^T) = [1 \ 1 \ 0]^T$;
- $f([2 \ 2 \ 2 \ 2]^T) = [2 \ 0 \ 1]^T$;
- $f([1 \ 0 \ 1 \ 0]^T) = [1 \ 2 \ 1]^T$;
- $f([0 \ 1 \ 0 \ 1]^T) = [0 \ 1 \ 1]^T$;
- $f([1 \ 1 \ 0 \ 1]^T) = [0 \ 0 \ 0]^T$;
- $f([0 \ 0 \ 1 \ 1]^T) = [0 \ 1 \ 0]^T$.

Existuje-li takové lineární zobrazení f , určete, zda je jediné.

Řešení. Pro zjednodušení zápisu zavedeme:

$$\mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_5 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_6 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_6 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Musíme rozhodnout, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ t.ž. $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i \forall i \in \{1, \dots, 6\}$, a pokud existuje, zda je jediné.

Řešení (pokračování). Připomenutí: Musíme rozhodnout, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ t.ž. $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$, a pokud existuje, zda je jediné.

To je ekvivalentní určení, zda existuje matice $A \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 4}$ t.ž. $A\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i \forall i \in \{1, \dots, 6\}$.

- Matice A je zde maticí lineárního zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím.

Dostali jsme soustavu šesti rovnic (v nichž je neznámá matice A):

$$A\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1, \quad A\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2, \quad A\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3, \quad A\mathbf{b}_4 = \mathbf{c}_4, \quad A\mathbf{b}_5 = \mathbf{c}_5, \quad A\mathbf{b}_6 = \mathbf{c}_6.$$

Tato soustava je ekvivalentní s rovnicí

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 & \mathbf{b}_6 \end{bmatrix}}_{=:B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_5 & \mathbf{c}_6 \end{bmatrix}}_{=:C},$$

ve které je neznámá matice A .

- Dostali jsme maticovou rovnici $AB = C$, kde A je neznámá.
- To je maticová rovnice typu „ $XA = B$ “.

Řešení (pokračování). Připomenutí: Musíme vyřešit maticovou rovnici $AB = C$, kde $B = [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_6]$ a $C = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_6]$, zatímco A je neznámá.

Transpozicí obou stran rovnice $AB = C$ dostaneme $B^T A^T = C^T$. Nyní sestrojíme matici:

$$[B^T \mid C^T] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T & \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T & \mathbf{c}_3^T \\ \mathbf{b}_4^T & \mathbf{c}_4^T \\ \mathbf{b}_5^T & \mathbf{c}_5^T \\ \mathbf{b}_6^T & \mathbf{c}_6^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

a Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme (následující slajd):

Řešení (pokračování).

$$\text{RREF}([B^T \mid C^T]) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Tedy rovnice $B^T A^T = C^T$ má **jediné řešení**, a zejména

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transpozicí dostáváme **jediné řešení** rovnice $AB = C$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Existence a jednoznačnost matice A implikují, že existuje **jediné** lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ t.ž. $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i \forall i \in \{1, \dots, 6\}$.

- **Poznámka:** Matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

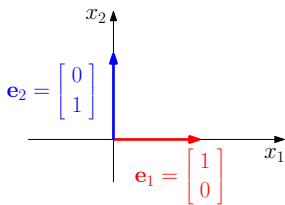
je maticí (jediného) lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$ t.ž. $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i \forall i \in \{1, \dots, 6\}$.

- Pomocí matice A můžeme určit předpis pro naše lineární zobrazení f .
- Pro každé $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ v \mathbb{Z}_3^4 platí:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

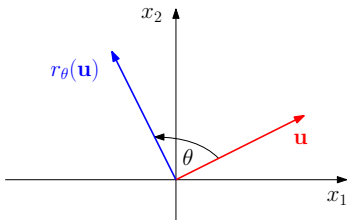
- Pro více příkladů viz skriptá (Penev, oddíl 1.10.4).

- Nyní se podívejme na několik geometrických příkladů (s hezkými obrázky).
- Zaměříme se konkrétně na několik speciálních lineárních zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
 - Nebudeme formálně dokazovat, že tato zobrazení jsou lineární.
 - Chcete-li se o jejich linearitě přesvědčit, zamyslete se nad tím, co se geometricky stane se součty a skalárními násobky vektorů při působení těchto zobrazení.
- **Poznámka:** Kanonické jednotkové vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ v rovině \mathbb{R}^2 :



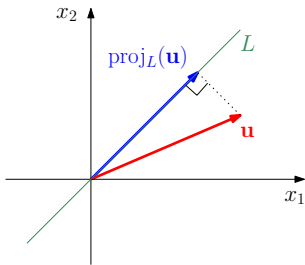
- **Otočení (rotace).** Zobrazení $r_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které otáčí každý vektor kolem počátku o úhel θ proti směru hodinových ručiček, je lineární, a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je:

$$\begin{bmatrix} r_\theta(\mathbf{e}_1) & r_\theta(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$



Všimněme si, že rotace o úhel θ po směru hodinových ručiček je totéž jako rotace o úhel $-\theta$ proti směru hodinových ručiček (proto stačí uvažovat pouze rotace proti směru hodinových ručiček, pokud zároveň připustíme i záporné úhly).

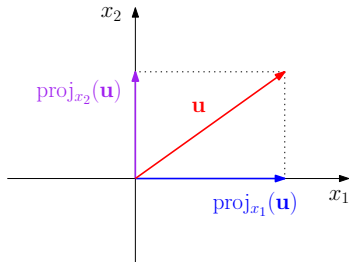
- **Ortogonalní projekce.** Je-li L přímka v \mathbb{R}^2 , která prochází počátkem, je ortogonalní projekce $\text{proj}_L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na L lineární.



- Prozatím neumíme vypočítat matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím (potřebovali bychom na to více teorie, než prozatím známe).
- Nicméně tuto matici už umíme vypočítat v některých speciálních případech.

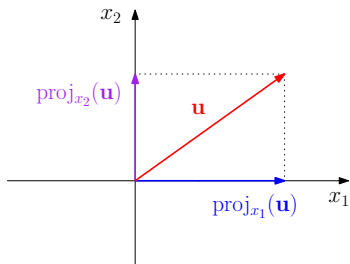
- **Ortogonalní projekce.**

- Uvažujme ortogonální projekce $\text{proj}_{x_1}, \text{proj}_{x_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na osy x_1 a x_2 respektive.



- Pro každý vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\text{proj}_{x_1}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{proj}_{x_2}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$



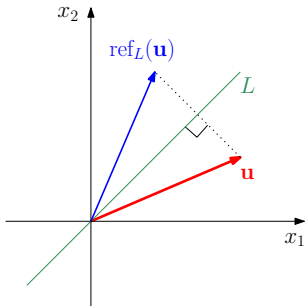
- Matice ortogonální projekce proj_{x_1} vzhledem ke kanonickým bázím je

$$\left[\text{proj}_{x_1}(\mathbf{e}_1) \quad \text{proj}_{x_1}(\mathbf{e}_2) \right] = \left[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{0} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice ortogonální projekce proj_{x_2} vzhledem ke kanonickým bázím je

$$\left[\text{proj}_{x_2}(\mathbf{e}_1) \quad \text{proj}_{x_2}(\mathbf{e}_2) \right] = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{e}_2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

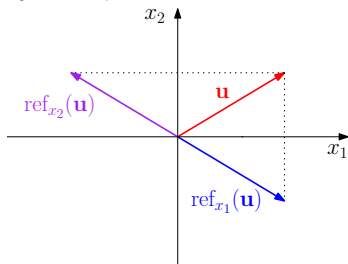
- **Osová symetrie.** Je-li L přímka v \mathbb{R}^2 , která prochází počátkem, je zobrazení osově symetrie $\text{ref}_L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle přímky L lineární.



- Podobně jako v případě ortogonální projekce prozatím neumíme vypočítat matici ref_L vzhledem ke kanonickým bázím (pro libovolnou přímku L procházející počátkem).
- Nicméně tuto matici už umíme vypočítat v některých speciálních případech.

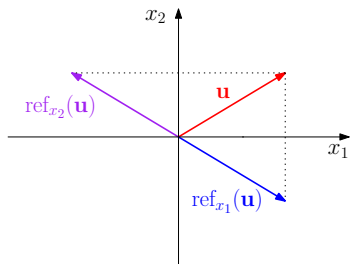
- **Osová symetrie.**

- Uvažujme osové symetrie $\text{ref}_{x_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\text{ref}_{x_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle osy x_1 a osy x_2 respektive.



- Pro každý vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\text{ref}_{x_1}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}, \quad \text{ref}_{x_2}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$



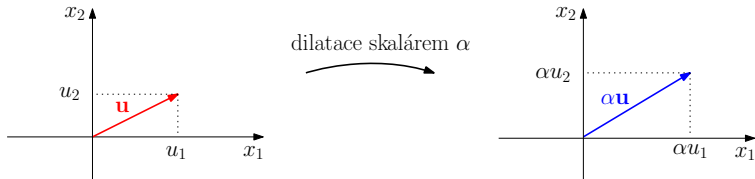
- Matice lineárního zobrazení ref_{x_1} vzhledem ke kanonickým bázím je:

$$\left[\text{ref}_{x_1}(\mathbf{e}_1) \quad \text{ref}_{x_1}(\mathbf{e}_2) \right] = \left[\mathbf{e}_1 \quad -\mathbf{e}_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení ref_{x_2} vzhledem ke kanonickým bázím je:

$$\left[\text{ref}_{x_2}(\mathbf{e}_1) \quad \text{ref}_{x_2}(\mathbf{e}_2) \right] = \left[-\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Dilatace.** Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár, potom zobrazení, které násobí každý vektor v \mathbb{R}^2 skalárem α , je lineární.



- Matice tohoto lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím je

$$[\alpha\mathbf{e}_1 \quad \alpha\mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

- **Horizontální zkosení.** *Horizontální zkosení* v \mathbb{R}^2 je zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 dané předpisem

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

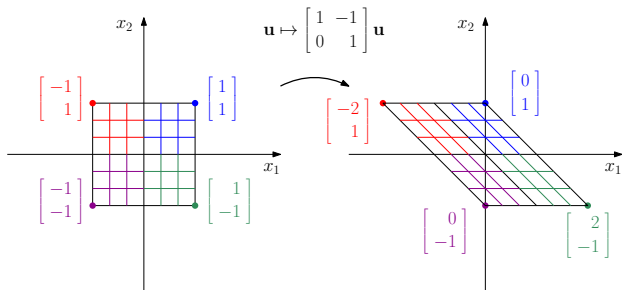
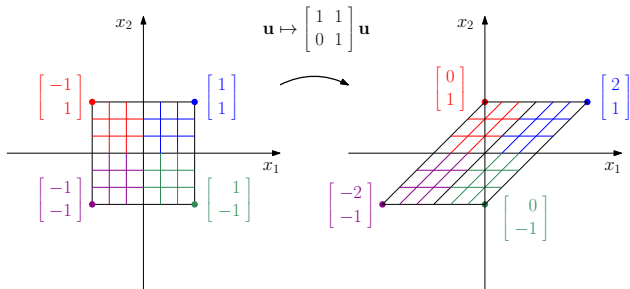
tj. předpisem

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u_1 + ku_2 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

kde k je pevná reálná konstanta.

- Toto zobrazení má za následek horizontální „naklonění“ objektů v souřadnicové rovině (při zachování vertikální složky).
- Na následujícím slajdu je to ilustrováno pro případy $k = 1$ a $k = -1$.

• **Horizontální zkosení.** $\mathbf{u} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$



- **Vertikální zkosení.** *Vertikální zkosení* v \mathbb{R}^2 je zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 dané předpisem

$$\mathbf{u} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

tj. předpisem

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u_1 \\ ku_1 + u_2 \end{bmatrix},$$

kde k je pevná reálná konstanta.

- Toto zobrazení má za následek vertikální „naklonění“ objektů v souřadnicové rovině (při zachování horizontální složky).
- Na následujícím slajdu je to ilustrováno pro případy $k = 1$ a $k = -1$.

- Vertikální zkosení. $\mathbf{u} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$

