

# Lineární algebra 1

## Přednáška č.3

Lineární soustavy (maticový tvar). Hodnota matice. Operace s maticemi

Irena Penev

15.10.2025

Během příštích několika týdnů (dokud neprobereme tělesa formálně, tj. axiomaticky) budeme předpokládat, že uvažované těleso  $\mathbb{F}$  je jedno z následujících:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  nebo  $\mathbb{Z}_p$  (kde  $p$  je prvočíslo). Nicméně, všechno, co dokážeme během těchto přednášek, bude platit pro libovolná tělesa  $\mathbb{F}$ , nejen pro tato čtyři.

- **Pozor:** Následující množiny **nejsou** tělesa:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_n$  (kde  $n \in \mathbb{N}$  **není** prvočíslo).

Tato přednáška má šest částí:

- 1 Algebraické operace s vektory a lineární obal
- 2 Součin matice a vektoru
- 3 Lineární soustavy (maticový tvar)
- 4 Hodnost matice
- 5 Operace s maticemi
- 6 Transpozice matice

## 1 Algebraické operace s vektory a lineární obal

- Necht  $\mathbb{F}$  je těleso.

- Pro vektory  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  a  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  v  $\mathbb{F}^n$  definujeme

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$ ;      •  $\mathbf{x} - \mathbf{y} := \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$ .

- Pro vektor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  v  $\mathbb{F}^n$  a skalár  $\alpha \in \mathbb{F}$  definujeme

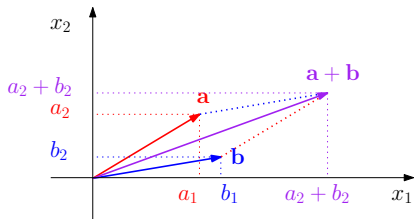
- $\alpha \mathbf{x} := \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$ .

## Příklad

Pro vektory  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  a  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  v  $\mathbb{Z}_3^4$  platí:

$$\bullet \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 1+0 \\ 2+2 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bullet 2\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

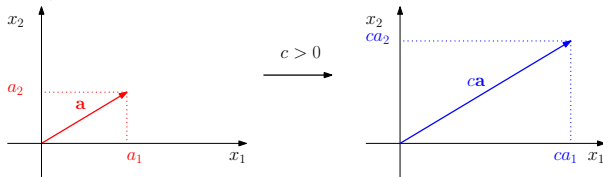
- V  $\mathbb{R}^2$  sčítání vektorů a násobení skalárem vektoru mají geometrickou interpretaci.
- Sčítání:



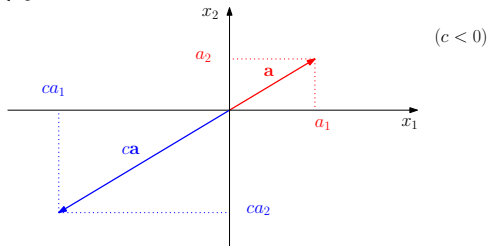
- Násobení vektoru v  $\mathbb{R}^2$  skalárem interpretujeme takto.

- Necht  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  je vektor v  $\mathbb{R}^2$  a  $c \in \mathbb{R}$  je skalár.

- Jestliže  $c > 0$ :



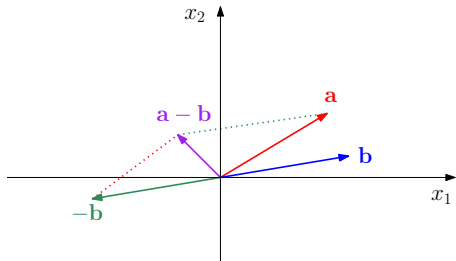
- Jestliže  $c < 0$ :



- Jestliže  $c = 0$ , pak  $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , což je počátek.

- Pro vektory  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  a  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  v  $\mathbb{R}^2$  platí

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}.$$



- Pro vektory v  $\mathbb{R}^3$  máme podobnou interpretaci operací s vektory, jen v trojrozměrném prostoru.

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. *Lineární kombinací* vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  z  $\mathbb{F}^n$  rozumíme libovolný vektor, který získáme sčítáním jejich skalárních násobků, tj. libovolný vektor, který lze vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  jsou skaláry v tělese  $\mathbb{F}$ .

- Např. v  $\mathbb{R}^3$  jsou vektory  $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$  lineárními

kombinacemi vektorů  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , protože

- $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

- Podobně je  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  lineární kombinací vektoru  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  in  $\mathbb{Z}_3^2$ ,  
protože  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

## Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. *Lineární kombinací* vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  z  $\mathbb{F}^n$  rozumíme libovolný vektor, který získáme sčítáním jejich skalárních násobků, tj. libovolný vektor, který lze vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  jsou skaláry v tělese  $\mathbb{F}$ .

- Poznámka: V  $\mathbb{F}^n$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso), nulový vektor  $\mathbf{0}$  je lineární kombinací **libovolných** vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , protože

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_k.$$

- Navíc definujeme „prázdný součet“ vektorů v  $\mathbb{F}^n$  (nebo „součet prázdného seznamu“ vektorů v  $\mathbb{F}^n$ ) jako  $\mathbf{0}$ , kde  $\mathbf{0}$  je nulový vektor v  $\mathbb{F}^n$ .

## Definice

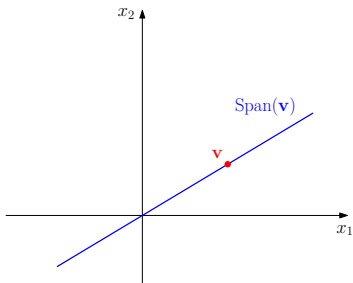
*Lineární obal* vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  z  $\mathbb{F}^n$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso), značený  $\text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\})$  nebo jednoduše  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů, tedy

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}.$$

- Poznámky:

- $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ :  $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \mathbf{v}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ;
- $\text{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ ;
- $\text{Span}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ .

- Tady je geometrická intuice pro lineární obaly v  $\mathbb{R}^n$ .
- Připomenutí:  $\text{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$  a  $\text{Span}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ .
- Jestliže  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , pak  $\text{Span}(\mathbf{v}) = \{\alpha\mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  je přímka určená počátkem a vektorem  $\mathbf{v}$ .
  - Vskutku, tato přímka je množinou všech skalárních násobků vektoru  $\mathbf{v}$ .

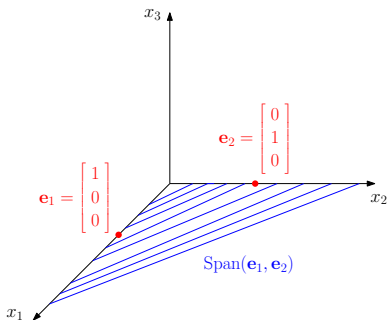


- Co když máme dva vektory,  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ ?
- Pokud ani jeden z těchto dvou vektorů není skalárním násobkem toho druhého (a zejména pokud žádný z nich není nulový vektor), pak  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  je rovina určená body  $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ .
- Obzvláště jednoduše lze vizualizovat případ vektorů

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^3:$$

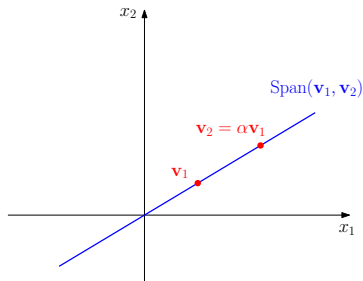
$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \left\{ a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

což je  $x_1x_2$ -rovina v  $\mathbb{R}^3$  (viz příští slajd).



$$\begin{aligned}\text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \left\{ a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

- Co když máme dva vektory, přičemž je jeden z nich skalárním násobkem toho druhého?
- Jestliže  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ , kde platí  $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$  pro nějaký skalár  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ , pak  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  je přímka procházející počátek a body  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ .



- Obecněji, lineární obal vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ , značený  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , je nejmenší geometrický útvar (bod, přímka, rovina nebo jejich zobecnění do vyšších rozměrů), který obsahuje **počátek** a všechny vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

## 2 Součin matice a vektoru

### Definice

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m$ , kde

$$A = \left[ \mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m \right] \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

definujeme součin  $A\mathbf{x}$  takto:

$$A\mathbf{x} := \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{a}_i = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m.$$

- Tedy je  $A\mathbf{x}$  lineární kombinací sloupců matice  $A$ , přičemž jsou skaláry před sloupci určeny složkami vektoru  $\mathbf{x}$ .

- **Připomenutí:** Pro matici  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a

vektor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso):

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{a}_i = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m.$$

- **Poznámka:** Aby součin  $A\mathbf{x}$  byl definován, musí být splněny dvě podmínky:
  - prvky matice  $A$  a vektoru  $\mathbf{x}$  musí patřit do stejného tělesa;
  - počet **sloupců** matice  $A$  musí být roven počtu **složek** vektoru  $\mathbf{x}$ .
- Schematicky:

$$\underbrace{A}_{\in \mathbb{F}^{n \times m}} \underbrace{\mathbf{x}}_{\in \mathbb{F}^m} = \underbrace{A\mathbf{x}}_{\in \mathbb{F}^n}.$$

## Příklad

Uvažujme matici  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , zadané níže:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Příklad

Uvažujme matici  $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 3}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^3$ , zadané níže:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- **Poznámka:** Necht  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak z definic jednoduše plyne, že pro matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ , vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^m$  a skaláry  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  platí:

①  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u};$

②  $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

③  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u};$

④  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w});$

⑤  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v};$

⑥  $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(A\mathbf{u}).$

### Tvrzení 1

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso, necht'  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{F}^n$ , a položme  $A := [ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m ]$ . Pak platí

$$\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \{ \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \}.$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) &= \{ x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F} \} \\ &= \left\{ [ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m ] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F} \right\} \\ &= \{ \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \}. \end{aligned}$$

□

## Tvrzení 1

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso, nechť  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{F}^n$ , a položme  $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$ . Pak platí

$$\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m\}.$$

- **Poznámka:** Nechť  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{F}^n$ , kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso, a položme  $A := [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$ .
  - Dle Tvrzení 1, množina  $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ , kterou jsme definovali jako množinu všech lineárních kombinací vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ , je rovna množině všech možných součinů  $\mathbf{Ax}$ .
    - Tady je matice  $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$  pevně daná, zatímco vektor  $\mathbf{x}$  je proměnný.
  - $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ , tj. lineární obal sloupců matice  $A$ , se nazývá „sloupcovým podprostorem“ matice  $A$ , což značíme  $\text{Col}(A)$ .
    - K tomu se ještě vrátíme (za několik týdnů).

- Necht  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $i \in \{1, \dots, n\}$  označme  $\mathbf{e}_i^n$  vektor v  $\mathbb{F}^n$ , jehož  $i$ -tá složka je 1, zatímco všechny ostatní složky jsou nulové.

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-tá složka}$$

- Je-li  $n$  jasné z kontextu, vynecháváme horní index  $n$  a píšeme prostě  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  namísto  $\mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_n^n$ , respektive.
- Vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  nazýváme *kanonickými jednotkovými vektory*, zatímco množinu  $\mathcal{E}_n := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  nazýváme *kanonickou bází* prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-t slozka}$$

- **Poznámka:** Každy vektor  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  z prostoru  $\mathbb{F}^n$  lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci kanonických jednotkových vektorů  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , a to takto:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n.$$

## Tvrzení 2

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro každou matici  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a každý index  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí  $A\mathbf{e}_i^m = \mathbf{a}_i$ .

- **Poznámka:** Tvrzení 2 říká, že vynásobení matice  $A$   $i$ -tým kanonickým jednotkovým vektorem dává  $i$ -tý sloupec původní matice  $A$ .

## Tvrzení 2

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro každou matici  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a každý index  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí  $A\mathbf{e}_i^m = \mathbf{a}_i$ .

*Důkaz.* Pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_i^m &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-tá složka} \\ &= 0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{1}\mathbf{a}_i + 0\mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

□

- Pro těleso  $\mathbb{F}$ , *jednotková matice* v  $\mathbb{F}^{n \times n}$  je následující matice:

$$I_n := \left[ \mathbf{e}_1^n \quad \dots \quad \mathbf{e}_n^n \right]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Tedy  $I_n$  má jedničky na hlavní diagonále a nuly jinde.

### Tvrzení 3

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  platí  $I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

*Důkaz.* Pro každé  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  z  $\mathbb{F}^n$  platí:

$$\begin{aligned} I_n \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^n & \mathbf{e}_2^n & \cdots & \mathbf{e}_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= v_1 \mathbf{e}_1^n + v_2 \mathbf{e}_2^n + \cdots + v_n \mathbf{e}_n^n \\ &= v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

□

### Tvrzení 2

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pro každou matici  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{v}$   $\mathbb{F}^{n \times m}$  a každý index  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí  $A\mathbf{e}_i^m = \mathbf{a}_i$ .

### Tvrzení 3

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  platí  $I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

### Tvrzení 3

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak platí:

- a)  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^m: O_{n \times m} \mathbf{v} = \mathbf{0};^a$
- b)  $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times m}: A\mathbf{0} = \mathbf{0}.^b$

<sup>a</sup>Tady nulový vektor  $\mathbf{0}$  patří do  $\mathbb{F}^n$ .

<sup>b</sup>Ve výrazu  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$  máme  $\mathbf{0} \in \mathbb{F}^m$  a  $\mathbf{0} \in \mathbb{F}^n$ .

*Důkaz.* Plyne z definic.  $\square$

### 3 Lineární soustavy (maticový tvar)

- *Maticový tvar lineární soustavy* je rovnice tvaru

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde matice  $A$  a vektor  $\mathbf{b}$  jsou pevně dány, zatímco vektor  $\mathbf{x}$  je proměnný.

- Tady prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  patří do stejného tělesa  $\mathbb{F}$ .
- Počet **řádků** matice  $A$  musí být stejný jako počet **složek** vektoru  $\mathbf{b}$ .
- Každé řešení  $\mathbf{x}$  je vektor v  $\mathbb{F}^m$ , kde  $m$  je počet **sloupců** matice  $A$ .
- Rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je ekvivalentní s soustavou lineárních rovnic, jejíž rozšířená matice je  $\left[ A \mid \mathbf{b} \right]$ .
  - Detaily: na příštím slajdu.
  - Matice  $\left[ A \mid \mathbf{b} \right]$  se také nazývá rozšířenou maticí rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

$$Ax = \mathbf{b} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{=b}$$

$$\iff x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

## Příklad

Vyřešte rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

přičemž prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  jsou reálná čísla. Kolik řešení má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ?

*Řešení.* Rozšířená matice rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{array} \right].$$

Gaussovou-Jordanovou eliminací dostáváme:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \underbrace{\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{= \text{RREF}([A \mid \mathbf{b}])}.$$

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[ A \mid \mathbf{b} \right]\right) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Matice  $\text{RREF}\left(\left[ A \mid \mathbf{b} \right]\right)$  je rozšířenou maticí následující lineární soustavy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Tato soustava je řešitelná, má jednu volnou proměnnou (konkrétně  $x_2$ ). Teď vyčteme řešení naší lineární soustavy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2s + 2 \\ x_2 & = & s, \end{array} \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s + 2 \\ s \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

Rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má nekonečně mnoho řešení.  $\square$

## Příklad

Vyřešte rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

přičemž prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  patří do  $\mathbb{Z}_3$ . Kolik řešení má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ?

*Řešení.* Rozšířená matice rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Nyní upravíme matici, abychom vypočítali  $\text{RREF}([A \mid \mathbf{b}])$ .

Řešení (pokračování).

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} A & & & & \mathbf{b} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow 2R_3 \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right] = \text{RREF} \left( \left[ \begin{array}{ccc|cc} A & & & & \mathbf{b} \end{array} \right] \right)$$

Řešení (pokračování). Připomenutí:

$$\text{RREF}\left(\left[ A \mid \mathbf{b} \right]\right) = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Nejpravější sloupec (vpravo od svyslé tečkované čáry) matice  $\text{RREF}\left(\left[ A \mid \mathbf{b} \right]\right)$  je bázický, a proto je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  neřešitelná. (Počet řešení je nula.)  $\square$

- Upravování matice  $\text{RREF}\left(\left[ A \mid \mathbf{b} \right]\right)$  ještě jednou (viz příští slajd):

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} A & & & & \mathbf{b} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \\ \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow 2R_3 \\ \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

$$\left[ A \mid \mathbf{b} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

- Mohli jsme se zastavit jakmile jsme dostali **červenou** matici (i když tato matice není v redukovaném odstupňovaném tvaru).
- Poslední řádek „kóduje“ rovnici  $0 = 2$ , která nemá žádné řešení.
- Obecněji, jakmile dostaneme řádek tvaru  $[ 0 \ \dots \ 0 \mid \blacksquare ]$ , kde  $\blacksquare$  je nenulové číslo, nemusíme naši matici dále upravovat a můžeme odvodit, že naše rovnice/soustava nemá žádné řešení (protože takový řádek „kóduje“ rovnici  $0 = \blacksquare$ , přičemž  $\blacksquare \neq 0$ ).

- Připomenutí:

### Příklad

Vyřešte rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

přičemž prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  jsou reálná čísla. Kolik řešení má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ?

- Viděli jsme, že pro

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(kde prvky matice  $A$  a složky vektoru  $\mathbf{b}$  jsou reálná čísla),  
obecné řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s + 2 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

- Na druhou stranu snadně lze vypočítat, že obecné řešení homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix}, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

- Tedy:

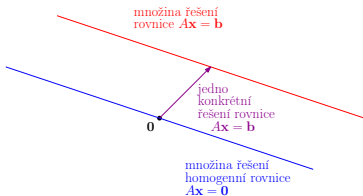
$$\begin{array}{l} \text{obecné řešení} \\ \text{rovnice } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} = \begin{array}{l} \text{jedno konkrétní} \\ \text{řešení rovnice} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} + \begin{array}{l} \text{obecné řešení} \\ \text{homogenní rovnice} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array}$$

- Připomenutí:

$$\text{obecné řešení rovnice } Ax = b = \text{jedno konkrétní řešení rovnice } Ax = b + \text{obecné řešení homogenní rovnice } Ax = 0$$

- Tedy:

$$\text{množina řešení rovnice } Ax = b = \text{jedno konkrétní řešení rovnice } Ax = b + \text{množina řešení homogenní rovnice } Ax = 0$$



- A platí to obecně!

## Věta 4

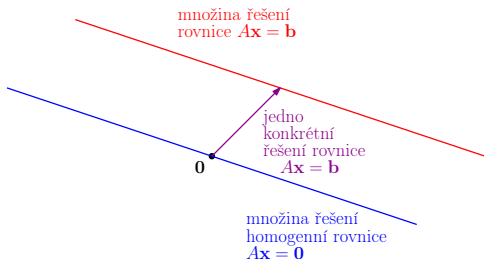
Nechť  $\mathbf{x}_0$  je libovolné řešení nějaké **řešitelné** rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso,  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ ).<sup>a</sup> Pak je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě

$$\mathbf{x}_0 + \underbrace{\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}}_{\text{množina řešení homogenní rovnice } A\mathbf{x} = \mathbf{0}} := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

množina řešení homogenní  
rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

---

<sup>a</sup>Tedy platí  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .



## Věta 4

Nechť  $\mathbf{x}_0$  je libovolné řešení nějaké **řešitelné** rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso,  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ ).<sup>a</sup> Pak je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě

$$\mathbf{x}_0 + \underbrace{\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}}_{\substack{\text{množina řešení homogenní} \\ \text{rovnice } A\mathbf{x} = \mathbf{0}}} := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

---

<sup>a</sup>Tedy platí  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .

*Důkaz.*

- Nechť  $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (Tedy  $\mathbf{x}_0 \in S$  a  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .)
- Nechť  $S_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  je množina řešení homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Musíme dokázat, že platí  $S = \mathbf{x}_0 + S_0$ .

Důkaz (pokračování). Připomenutí:

- Necht  $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (Tedy  $\mathbf{x}_0 \in S$  a  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .)
- Necht  $S_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  je množina řešení homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Musíme dokázat, že platí  $S = \mathbf{x}_0 + S_0$ .

Nejdřív dokážeme, že  $S \subseteq \mathbf{x}_0 + S_0$ . Necht  $\mathbf{y} \in S$ , tj.  $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ .

Položme  $\mathbf{x} := \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ . Pak platí

$$A\mathbf{x} = A(\underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{x}_0}_{=\mathbf{x}}) = \underbrace{A\mathbf{y}}_{=\mathbf{b}} - \underbrace{A\mathbf{x}_0}_{=\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

a tedy  $\mathbf{x} \in S_0$ . Plyne, že  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + S_0$ , a tedy  $S \subseteq \mathbf{x}_0 + S_0$ .

Důkaz (pokračování). Připomenutí:

- Necht  $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (Tedy  $\mathbf{x}_0 \in S$  a  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .)
- Necht  $S_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  je množina řešení homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Musíme dokázat, že platí  $S = \mathbf{x}_0 + S_0$ .

Nyní dokážeme, že  $\mathbf{x}_0 + S_0 \subseteq S$ . Necht  $\mathbf{x} \in S_0$ . Pak platí

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = \underbrace{A\mathbf{x}_0}_{=\mathbf{b}} + \underbrace{A\mathbf{x}}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

a tedy  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in S$ . Plyne, že  $\mathbf{x}_0 + S_0 \subseteq S$ .  $\square$

## Věta 4

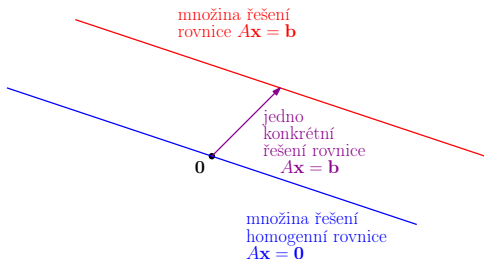
Nechť  $\mathbf{x}_0$  je libovolné řešení nějaké **řešitelné** rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso,  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ ).<sup>a</sup> Pak je množina řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě

$$\mathbf{x}_0 + \underbrace{\{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}}_{\text{množina řešení homogenní rovnice } A\mathbf{x} = \mathbf{0}} := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

množina řešení homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

---

<sup>a</sup>Tedy platí  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ .



## 4 Hodnost matice

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{REF}$$
$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{RREF}$$

- **Připomenutí:** *Odstupňovaný tvar* matice  $A$  je libovolná matice v odstupňovaném tvaru, která je řádkově ekvivalentní s maticí  $A$ .
  - Zatímco matice  $A$  má jediný **redukovaný** odstupňovaný tvar,  $A$  může mít více (nebo dokonce nekonečně mnoho) odstupňovaných tvarů.
  - Nicméně všechny odstupňované tvary matice  $A$  jsou schematicky stejné: jejich „černé čtverce“ (■), tj. pivoty, jsou na stejných pozicích.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

- *Pivoty* libovolné matice  $A$  jsou *pivoty* libovolného odstupňovaného tvaru matice  $A$ .
- *Bázické sloupce* matice  $A$  jsou sloupce, které obsahují pivot, a ty ostatní sloupce jsou *nebázické*.
- Např. matice vpravo je jedním z odstupňovaných tvarů matice vlevo. Pivoty jsou zvýrazněny rámečkem, *bázické sloupce* jsou **červené**.

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & \boxed{1} & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & \boxed{-6} & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

- *Hodnost* matice  $A$ , značená  $\text{rank}(A)$ , je počet pivotů matice  $A$  (ekvivalentně: počet *bázických sloupců* matice  $A$ ).
  - Ekvivalentně:  $\text{rank}(A)$  je počet nenulových řádků v jakémkoliv odstupňovaném tvaru matice  $A$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

### Důsledek 4 z Přednášky 2

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso.  $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ :

$$A \sim B \iff \text{RREF}(A) = \text{RREF}(B).$$

### Tvrzení 5

Řádkově ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

*Důkaz.* Dle Důsledku 4 z Přednášky 2, řádkově ekvivalentní matice mají stejný redukovaný odstupňovaný tvar (RREF). Dle definice, hodnost matice je prostě počet nenulových řádků jejího RREFu.  $\square$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Tvrzení 6

Nechť  $A$  je matice typu  $n \times m$  (s prvky z nějakého tělesa  $\mathbb{F}$ ). Pak platí  $\text{rank}(A) \leq \min\{n, m\}$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Jinými slovy, platí  $\text{rank}(A) \leq n$  (tj. hodnost matice není větší než počet jejích řádků), a zároveň platí  $\text{rank}(A) \leq m$  (tj. hodnost matice není větší než počet jejích sloupců).

*Důkaz.* Podle definice je  $\text{rank}(A)$  roven počtu pivotů matice  $A$ , přičemž každý řádek i každý sloupec obsahuje nejvýše jeden pivot.  $\square$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Tvrzení 6

Nechť  $A$  je matice typu  $n \times m$  (s prvky z nějakého tělesa  $\mathbb{F}$ ). Pak platí  $\text{rank}(A) \leq \min\{n, m\}$ .

- **Terminologie:** Pro těleso  $\mathbb{F}$  a matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (tedy  $A$  má  $n$  řádků a  $m$  sloupců):
  - jestliže  $\text{rank}(A) = n$ , říkáme, že  $A$  má plnou *řádkovou hodnotu*;
  - jestliže  $\text{rank}(A) = m$ , říkáme, že  $A$  má plnou *sloupcovou hodnotu*;
  - jestliže  $\text{rank}(A) = \min\{n, m\}$ , říkáme, že  $A$  má *plnou hodnotu*.

- Dle věty na příštím slajdu lze počet řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  jednoduše určit, pokud známe typ matice  $A$  (tj. počet jejích řádků a sloupců) a zároveň jsme vypočítali  $\text{rank}(A)$  a  $\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}\right)$ .
  - Formální důkaz vynecháváme (viz skripta: Penev, Theorem 1.6.4), ale nástin důkazu bude na tabuli.
- Pak se podíváme na pár důsledků této věty (pro matice plné řádkové nebo sloupcové hodnotí).

## Věta 7

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro každou matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a každý vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  platí

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) \leq \text{rank}(A) + 1.$$

Dále platí následující:

- Ⓐ Jestliže  $\text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) \neq \text{rank}(A)$  (tedy  $\text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) = \text{rank}(A) + 1$ ), pak je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  neřešitelná, tj. nemá žádné řešení.
- Ⓑ Jestliže  $\text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) = \text{rank}(A) = m$ , pak má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  jediné (tj. právě jedno) řešení.
- Ⓒ Jestliže  $\text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) = \text{rank}(A) < m$ , pak má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  více než jedno řešení, přesněji:
  - (c.1) je-li těleso  $\mathbb{F}$  konečné, pak je počet řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  roven  $|\mathbb{F}|^{m - \text{rank}(A)}$ ,
  - (c.2) je-li těleso  $\mathbb{F}$  nekonečné, pak je počet řešení rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nekonečný.

- Ve matici plné **sloupcové** hodností, všechny sloupce jsou bázické (obsahují pivot).
- Tedy redukovaný odstupňovaný tvar (RREF) matice plné sloupcové hodností má tvar:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

## Důsledek 8

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso). Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $\text{rank}(A) = m$  (tj.  $A$  má plnou sloupcovou hodnost);
- Ⓑ homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ );
- Ⓒ  $\exists \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  t.ž. rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má jediné řešení;
- Ⓓ  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení.

*Důkaz (nástin).* Stačí dokázat následující implikace:

$$\begin{array}{ccc} (a) & \implies & (d) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (c) & \longleftarrow & (b) \end{array}$$

Implikace „(d)  $\implies$  (b)” a „(b)  $\implies$  (c)” jsou očividné, zatímco implikace „(c)  $\implies$  (a)” a „(a)  $\implies$  (d)” plynou z Věty 7.  $\square$

- Matice plné **řádkové** hodnotí jsou matice, jejichž redukovaný odstupňovaný tvar (RREF) nemá žádné nulové řádky.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

### Důsledek 9

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso). Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:

- Ⓐ  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  má plnou řádkovou hodnotu);
- Ⓑ  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná.

- Formální důkaz vynecháváme (viz skripta: Penev, Corollary 1.6.6), nástin důkazu bude na tabuli.

- Čtvercové matice mají stejný počet řádků a sloupců, a proto ve případě čtvercových matic platí:

$$\begin{array}{ccccc} \text{plná} & & \text{plná} & & \text{plná} \\ \text{řádková} & = & \text{sloupcová} & = & \text{hodnota} \\ \text{hodnota} & & \text{hodnota} & & \end{array}$$

- Poznámka: Pro **čtvercovou** matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso) platí:

$$\text{rank}(A) = n \quad \iff \quad \text{RREF}(A) = I_n$$

## Věta 10

Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  je **čtvercová matice** (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso).  
Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- a)  $\text{rank}(A) = n$  (tj.  $A$  je čtvercová matice plné hodnosti);
- b)  $\text{RREF}(A) = I_n$ ;
- c) homogenní rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má pouze triviální řešení (tj. řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ );
- d)  $\exists \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  t.ž. rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  má jediné řešení;
- e)  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  jediné řešení;
- f)  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  má rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nejvíce jedno řešení;
- g)  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$  je rovnice  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  řešitelná.

- Důkaz jednoduše plyne z Důsledků 8 a 9.

## 5 Operace s maticemi

- Necht  $\mathbb{F}$  je těleso.
- Pro matice  $A = [ a_{i,j} ]_{n \times m}$  a  $B = [ b_{i,j} ]_{n \times m}$  z  $\mathbb{F}^{n \times m}$  a skalár  $c \in \mathbb{F}$  definujeme
  - $A + B := [ a_{i,j} + b_{i,j} ]_{n \times m}$ ;
  - $A - B := [ a_{i,j} - b_{i,j} ]_{n \times m}$ ;
  - $cA := [ ca_{i,j} ]$ .
- Tedy matice sčítáme (respektive odečítáme) tak, že sčítáme (respektive odečítáme) odpovídající prvky, tj.
  - $[ a_{i,j} ]_{n \times m} + [ b_{i,j} ]_{n \times m} = [ a_{i,j} + b_{i,j} ]_{n \times m}$ ;
  - $[ a_{i,j} ]_{n \times m} - [ b_{i,j} ]_{n \times m} = [ a_{i,j} - b_{i,j} ]_{n \times m}$ .
- Podobně násobíme matici (zleva) skalárem tak, že každý prvek matice násobíme tímto skalárem, tj.
  - $c [ a_{i,j} ]_{n \times m} = [ ca_{i,j} ]_{n \times m}$ .

- Matice lze také násobit!
- Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso, a nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a  $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$  jsou matice, kde  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$ .
- Definujeme

$$AB := \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & \dots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Všimněme si, že  $AB \in \mathbb{F}^{n \times p}$ .

- Aby součin  $AB$  byl definován, počet **sloupců** matice  $A$  musí být stejný jako počet **řádků** matice  $B$ .
- Matice  $AB$  má stejný počet **řádků** jako matice  $A$ , a má stejný počet **sloupců** jako matice  $B$ .
- Schematicky:

$$(n \times m) \cdot (m \times p) = (n \times p).$$

## Příklad

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

kde prvky matic  $A$  a  $B$  jsou reálná čísla. Vypočítejte  $AB$ .

*Řešení.* Položme

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

takže  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ . Pak platí  $AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ .

Vypočítáme  $A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$  a  $A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ , z čehož plyne

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}. \quad \square$$

### Tvrzení 11

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí:

- (a)  $I_n A = A I_m = A$ ;
- (b)  $A O_{m \times p} = O_{n \times p}$ ;
- (c)  $O_{p \times n} A = O_{p \times m}$ .

*Proof.* (b) a (c) jednoduše plynou z definic. Dokažme (a). Položme  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$ . Abychom ukázali, že  $I_n A = A$ , spočítáme:

## Tvrzení 11

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí:

Ⓐ  $I_n A = A I_m = A;$

*Důkaz (pokračování).* Připomenutí:  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$

$$I_n A = I_n \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n \mathbf{a}_1 & \dots & I_n \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dle definice} \\ \text{maticového součinu} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{dle Tvrzení 3}$$

$$= A.$$

## Tvrzení 11

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí:

Ⓐ  $I_n A = A I_m = A;$

*Důkaz (pokračování).* Připomenutí:  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$

Na druhou stranu, abych ukázali, že  $A I_m = A$ , spočítáme:

$$A I_m = A \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^m & \dots & \mathbf{e}_m^m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A \mathbf{e}_1^m & \dots & A \mathbf{e}_m^m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dle definice} \\ \text{maticového součinu} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{dle Tvrzení 2}$$

$$= A.$$

Tím je dokázáno (a).  $\square$

### Tvrzení 11

Nechť  $\mathbb{F}$  je těleso. Pak pro  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  platí:

- a)  $I_n A = A I_m = A$ ;
- b)  $A O_{m \times p} = O_{n \times p}$ ;
- c)  $O_{p \times n} A = O_{p \times m}$ .

- Existuje ještě jeden způsob vypočítání součinu dvou matic.
- Necht'  $A = [a_{i,j}]_{n \times m}$  a  $B = [b_{i,j}]_{m \times p}$  jsou matice s prvky z nějakého tělesa  $\mathbb{F}$ .
- Pak  $AB$  je matice typu  $n \times p$ , jejíž  $(i,j)$ -tý prvek je

$$\sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j},$$

pro všechny indexy  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

- Pro vysvětlení viz skripta (Penev, oddíl 1.7.2). Plyne z definice, ale je potřeba neztratit se v indexech.
- Ještě to lze napsat takto:

$$\left[ a_{i,j} \right]_{n \times m} \left[ b_{i,j} \right]_{m \times p} = \left[ \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j} \right]_{n \times p},$$

kde u každé ze tří matic v hranatých závorkách je uveden  $(i,j)$ -tý prvek matice.

- Abychom získali  $(i, j)$ -tý prvek matice  $AB$ , zaměříme se na  $i$ -tý řádek matice  $A$  a  $j$ -tý sloupec matice  $B$ .
- Poté sečteme součiny odpovídajících prvků tohoto řádku a sloupce a tím získáme  $(i, j)$ -tý prvek matice  $AB$ .

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,j} & \dots & b_{m,p} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

## Příklad

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

kde prvky matic  $A$  a  $B$  jsou z  $\mathbb{Z}_2$ . Vypočítejte matici  $AB$ .

*Řešení.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

## Příklad

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

kde prvky matic  $A$  a  $B$  jsou z  $\mathbb{Z}_2$ . Vypočítejte matici  $AB$ .

*Řešení (pokračování).*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



## Věta 12

Pro libovolné matice  $A, B, C$  a skaláry  $\alpha, \beta$  platí následující (za předpokladu, že matice jsou pro danou operaci vhodného typu a že prvky našich matic i skaláry patří do stejného tělesa  $\mathbb{F}$ ):

- a)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;
- b)  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- c)  $A + B = B + A$ ;
- d)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- e)  $(A + B)C = AC + BC$ ;
- f)  $A(B + C) = AB + AC$ ;
- g)  $(AB)C = A(BC)$ ;
- h)  $(\alpha A)B = \alpha(AB)$ ;
- i)  $A(\alpha B) = \alpha(AB)$ .

## Věta 12

- a)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$
- b)  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- c)  $A + B = B + A;$
- d)  $(A + B) + C = A + (B + C);$
- e)  $(A + B)C = AC + BC;$
- f)  $A(B + C) = AB + AC;$
- g)  $(AB)C = A(BC);$
- h)  $(\alpha A)B = \alpha(AB);$
- i)  $A(\alpha B) = \alpha(AB).$

- Důkaz vynecháváme, ale všechno kromě (g) plyne jednoduše z definic.
- Důkaz (g) je ve skriptech (Penev, Theorem 1.7.5 - nepovinná četba): je třeba vypočítat  $(i, j)$ -tý prvek matic  $(AB)C$  a  $A(BC)$  a ověřit, že je stejný.
  - Není moc náročný, ale je potřeba neztratit se v indexech!

- **Pozor:** Maticové násobení není komutativní, tj. pro matice  $A$  a  $B$ :

$$AB \neq BA.$$

- Za první může nastat, že jeden ze součinů  $AB$  a  $BA$  je definován, zatímco druhý nikoli.
  - Např. pro  $A \in \mathbb{F}^{2 \times 3}$  a  $B \in \mathbb{F}^{3 \times 4}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso) je součin  $AB$  definován, zatímco  $BA$  nikoli.
- Za druhé může nastat, že součiny  $AB$  a  $BA$  jsou definovány, ale nejsou stejného typu.
  - Např. pro  $A \in \mathbb{F}^{2 \times 3}$  a  $B \in \mathbb{F}^{3 \times 2}$  (kde  $\mathbb{F}$  je nějaké těleso) platí  $AB \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$  a  $BA \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ .
- Za třetí může nastat, že součiny  $AB$  a  $BA$  jsou definovány a mají stejný typ, avšak  $AB \neq BA$ .

- Např. pro  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  a  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  platí

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ a } BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ a tedy } AB \neq BA.$$

### Důsledek 13

Pro libovolné matice  $A, B$ , vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  a skaláry  $\alpha, \beta$  platí následující (za předpokladu, že matice a vektory mají pro danou operaci vhodný typ a že prvky/složky našich matic/vektorů i skaláry patří do stejného tělesa  $\mathbb{F}$ ):

- a)  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u};$
- b)  $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$
- c)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u};$
- d)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w});$
- e)  $(A + B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u};$
- f)  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v};$
- g)  $(AB)\mathbf{u} = A(B\mathbf{u});$
- h)  $(\alpha A)\mathbf{u} = \alpha(A\mathbf{u});$
- i)  $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(A\mathbf{u}).$

- Pro těleso  $\mathbb{F}$  a **čtvercovou** matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  definujeme mocniny matice  $A$  takto:
  - $A^0 := I_n$ ;
  - $A^{m+1} := A^m A$  pro každé  $m \in \mathbb{N}_0$ .
- Tedy podle konvence definujeme  $A^0 := I_n$ , zatímco pro  $m \in \mathbb{N}$  platí

$$A^m = \underbrace{A \dots A}_m,$$

kde jsme vynechali závorky, protože maticové násobení je asociativní.

## 6 Transpozice matice

- Pro matici  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  (kde  $\mathbb{F}$  je těleso) definujeme *transponovanou matici* k matici  $A$ , označenou  $A^T$ , jako matici z  $\mathbb{F}^{m \times n}$  tak, že  $(i, j)$ -tý prvek matice  $A^T$  je  $(j, i)$ -tý prvek matice  $A$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- Jinými slovy, při tvorbě  $A^T$  z  $A$  se sloupce matice  $A$  (zleva doprava) stanou řádky matice  $A^T$  (shora dolů) a naopak, řádky matice  $A$  (shora dolů) se stanou sloupci matice  $A^T$  (zleva doprava).

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{red}{\blacklozenge} \\ \color{blue}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{blue}{\blacklozenge} \\ \color{green}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{green}{\blacklozenge} \\ \color{purple}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{purple}{\blacklozenge} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} \color{red}{\blacklozenge} & \color{blue}{\blacklozenge} & \color{green}{\blacklozenge} & \color{purple}{\blacklozenge} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \color{red}{\blacklozenge} & \color{blue}{\blacklozenge} & \color{green}{\blacklozenge} & \color{purple}{\blacklozenge} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{red}{\blacklozenge} \\ \color{blue}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{blue}{\blacklozenge} \\ \color{green}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{green}{\blacklozenge} \\ \color{purple}{\blacklozenge} & * & * & * & * & \color{purple}{\blacklozenge} \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} \color{red}{\blacklozenge} & \color{blue}{\blacklozenge} & \color{green}{\blacklozenge} & \color{purple}{\blacklozenge} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \color{red}{\blacklozenge} & \color{blue}{\blacklozenge} & \color{green}{\blacklozenge} & \color{purple}{\blacklozenge} \end{bmatrix}$$

- Např. pro  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  platí  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

- Abychom šetřili místem, často zadáváme sloupcové vektory pomocí transpozic řádkových vektorů.
- Např. často píšeme  $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T$  místo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

## Tvrzení 14

Pro libovolné matice  $A, B$  a libovolný skalár  $\alpha$  platí následující (za předpokladu, že matice jsou pro danou operaci vhodného typu a že prvky našich matic i skalár patří do stejného tělesa  $\mathbb{F}$ ):

Ⓐ  $(A^T)^T = A;$

Ⓒ  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Ⓑ  $(A + B)^T = A^T + B^T;$

Ⓓ  $(AB)^T = B^T A^T.$

*Důkaz.* (a), (b) a (c) jsou očividné. Dokažme (d). Nechť  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  a  $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$ . Položme  $A = [a_{i,j}]_{n \times m}$  a  $B = [b_{i,j}]_{m \times p}$ .

Je zřejmé, že  $AB \in \mathbb{F}^{n \times p}$ , a tedy  $(AB)^T \in \mathbb{F}^{p \times n}$ .

Na druhou stranu,  $B^T \in \mathbb{F}^{p \times m}$  a  $A^T \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , a tedy  $B^T A^T \in \mathbb{F}^{p \times n}$ .

Tedy  $(AB)^T$  i  $B^T A^T$  jsou matice stejného typu ( $p \times n$ ) s prvky z  $\mathbb{F}$ .

Zbývá ukázat, že odpovídající prvky matic  $(AB)^T$  a  $B^T A^T$  jsou stejné.

$$(d) (AB)^T = B^T A^T$$

*Důkaz (pokračování).* Nechť  $i \in \{1, \dots, p\}$  a  $j \in \{1, \dots, n\}$ .  
Ukážeme, že matice  $(AB)^T$  a  $B^T A^T$  mají stejný  $(i, j)$ -tý prvek.

Dle definice transpozice je  $(i, j)$ -tý prvek matice  $(AB)^T$  roven  $(j, i)$ -tému prvku matice  $AB$ , což je  $\sum_{k=1}^m a_{j,k} b_{k,i}$ .

Nyní vypočítáme  $(i, j)$ -tý prvek matice  $B^T A^T$ . Pozorujme, že  $i$ -tý řádek matice  $B^T$  je  $\begin{bmatrix} b_{1,i} & b_{2,i} & \dots & b_{m,i} \end{bmatrix}$ , zatímco  $j$ -tý sloupec matice  $A^T$  je  $\begin{bmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,m} \end{bmatrix}^T$ . Tedy  $(i, j)$ -tý prvek matice  $B^T A^T$  je roven

$$b_{1,i} a_{j,1} + b_{2,i} a_{j,2} + \dots + b_{m,i} a_{j,m} = \sum_{k=1}^m b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^m a_{j,k} b_{k,i}.$$

Ukázali jsme, že odpovídající prvky matic  $(AB)^T$  a  $B^T A^T$  jsou stejné, a tedy  $(AB)^T = B^T A^T$ . Tím jsme dokázali (d).  $\square$

### Tvrzení 14

Pro libovolné matice  $A, B$  a libovolný skalár  $\alpha$  platí následující (za předpokladu, že matice jsou pro danou operaci vhodného typu a že prvky našich matic i skalár patří do stejného tělesa  $\mathbb{F}$ ):

a)  $(A^T)^T = A;$

c)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

b)  $(A + B)^T = A^T + B^T;$

d)  $(AB)^T = B^T A^T.$