

Linear Algebra 1

Přednáška #2

Soustavy lineárních rovnic

Irena Penev

8.10.2025

Během příštích několika týdnů (dokud neprobereme tělesa formálně, tj. axiomatically) budeme předpokládat, že uvažované těleso $\mathbb{F}$ je jedno z následujících: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{Z}_p$ (kde p je prvočíslo). Nicméně, všechno, co dokážeme během těchto přednášek, bude platit pro libovolná tělesa $\mathbb{F}$, nejen pro tato čtyři.

- **Pozor:** Následující množiny **nejsou** tělesa: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$ **není** prvočíslo).

Tato přednáška má dvě části:

- ① Úvod do matic a vektorů
- ② Soustavy lineárních rovnic

1 Úvod do matic a vektorů

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 $2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2 \qquad \qquad \qquad 3 \times 3$

- *Matice* je obdélníková tabulka matematických objektů, nejčastěji čísel z nějakého tělesa.
- Matice *typu* $n \times m$ (čteme „ n krát m “) je matice, která má n řádků a m sloupců.

počet řádků $\times$ počet sloupců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$
 2×3

$\uparrow$
 3×2

$\uparrow$
 3×3

- Čtvercová matice je matice, která má stejný počet řádků a sloupců.
 - C je čtvercová matice, zatímco A a B nikoliv.
- Hlavní diagonála čtvercové matice je diagonála mezi levým horním rohem a pravým dolním rohem.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Řádky matice se číslují shora dolů, zatímco sloupce se číslují zleva doprava.

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & \cdots & m \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 1 \rightarrow & \left[\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{array} \right] \\
 2 \rightarrow & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 n \rightarrow & & & &
 \end{array}$$

- Prvek matice na pozici (i, j) je ten, který leží v i -tém řádku (počítáno shora) a j -tém sloupci (počítáno zleva).

- Matici A lze určit takto:

$$A = \begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

- Toto značení znamená, že matice A je typu $n \times m$ (tj. má n řádků a m sloupců), a že prvek matice na pozici (i,j) je $a_{i,j}$.
- Tedy matice $A = \begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix}_{n \times m}$ je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

- Alternativní značení: Prvek matice A na pozici (i, j) také lze značit $A_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,m} \end{bmatrix}.$$

- Např. pro $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ platí

- $A_{1,1} = 1,$
- $A_{1,2} = 2,$
- $A_{1,3} = 3,$

- $A_{2,1} = 4,$
- $A_{2,2} = 5,$
- $A_{2,3} = 6.$

- **Pozor:** Značení $A_{i,j}$ se také používá pro matici, kterou dostaneme pokud z A vyškrtneme řádek i a sloupec j .
 - Uvidíme to v příštím semestru, v kontextu determinantů.

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,m} \\
 a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,m} \\
 a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,m}
 \end{bmatrix}$$

- *Nulová matice* je matice, jejíž všechny prvky jsou nulové.
- Nulovou matici typu $n \times m$ značíme $O_{n \times m}$.
 - Např.

$$O_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Nenulová matice* je matice, která má alespoň jeden nenulový prvek.
- **Značení:** Pro těleso $\mathbb{F}$ označujeme množinu všech matic typu $n \times m$ s prvky v $\mathbb{F}$ symbolem $\mathbb{F}^{n \times m}$.
 - Schematicky:

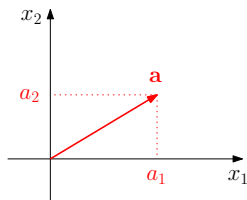
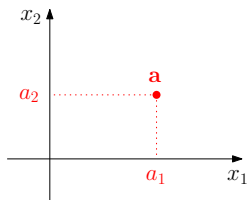
$$\mathbb{F}^{(\text{počet řádků}) \times (\text{počet sloupců})}$$
- **Terminologie:** *Reálná matice* je matice jejíž prvky jsou reálná čísla. *Komplexní matice* je matice jejíž prvky jsou komplexní čísla.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- *Sloupcový vektor*, nebo prostě *vektor*, je matice, která má pouze jeden sloupec.
- Vektory se obvykle značí tučnými písmeny (např. $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$) nebo písmeny se šipkou nad nimi (např. $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{x}$).

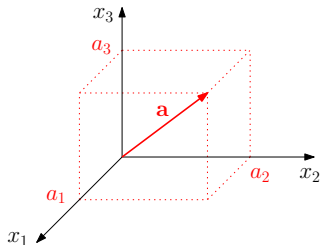
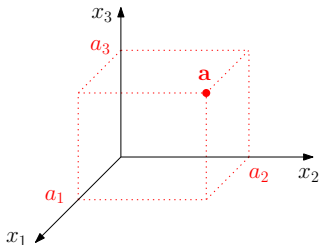
- Nulový vektor (tj. vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$) označujeme $\mathbf{0}$ or $\vec{0}$.
 - Počet složek v nulovém vektoru musí být buď určen explicitně, nebo zřejmý z kontextu.
- *Nenulový vektor* je vektor, který má alespoň jeden nenulový prvek.
- **Značení:** Pro těleso $\mathbb{F}$ označujeme symbolem $\mathbb{F}^n$ množinu všech (sloupcových) vektorů, které mají právě n složek, přičemž složky těchto vektorů patří do tělesa $\mathbb{F}$.
 - Tedy $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^{n \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F} \right\}$.

- Vektory v $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ mají geometrickou interpretaci.
- Vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lze v euklidovském roviném prostoru znázornit buď jako bod, nebo jako úsečku se šipkou začínající v počátku.



- Nulový vektor $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je prostě počátek.

- Vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ má podobnou geometrickou interpretaci.



- Nulový vektor $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je prostě počátek.
- Vektory v $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) jsou vícerozměrnými analogy vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

- Řádkový vektor je matice, která má pouze jeden řádek.
- Např.:
 - $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix};$
 - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix};$
 - $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$
- Pro těleso $\mathbb{F}$ označujeme symbolem $\mathbb{F}^{1 \times n}$ množinu všech řádkových vektorů, které mají právě n složek, přičemž složky těchto vektorů patří do tělesa $\mathbb{F}$.
 - **Připomínka:** $\mathbb{F}^{1 \times n} =$ množina matic typu $1 \times n$ s prvky v $\mathbb{F}$

- Sloupce matice jsou sloupcové vektory.
 - Matici lze určit pomocí jejích sloupců.
- Když určujeme matici $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ (kde $\mathbb{F}$ je nějaké těleso) takto:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix},$$

to znamená, že $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou sloupce matice A (zleva doprava), a navíc, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou vektory v $\mathbb{F}^n$.

- Např. pro $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$, kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

platí $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Řádky matice jsou řádkové vektory.
 - Matici lze určit pomocí jejích řádků.
- Když určíme matici $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ (kde $\mathbb{F}$ je nějaké těleso) takto:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix},$$

to znamená, že $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ jsou řádky matice A (shora dolů), a navíc, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ jsou řádkové vektory v $\mathbb{F}^{1 \times m}$.

- Např. pro $A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}$, kde

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{platí } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Alternativní značení: Pro matici A :

- $A_{i*} = i$ -tý řádek matice A
- $A_{*j} = j$ -tý sloupec matice A

$$A = \left[\begin{array}{ccc} - & A_{1*} & - \\ - & A_{2*} & - \\ & \vdots & \\ - & A_{n*} & - \end{array} \right]_{n \times m} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} | & | & & | & \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*m} & \\ | & | & & | & \end{array} \right]_{n \times m}$$

2 Soustavy lineárních rovnic

- Lineární rovnice v proměnných $x_1, \dots, x_m$ je rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b,$$

kde b a koeficienty $a_1, \dots, a_m$ jsou prvky nějakého tělesa $\mathbb{F}$.

- Např. $x_1 - 3(x_2 - x_1) = 7x_3 - 4$ (jejíž koeficienty jsou reálná čísla) je lineární, protože je ekvivalentní s rovnicí $4x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -4$, která je zjevně lineární.
- Rovnice $x_1^3 + x_2 = 17$ a $x_1 - \sqrt{x_2} = 5$ **nejsou** lineární kvůli x_1^3 a $\sqrt{x_2}$.

- *Soustava lineárních rovnic*, neboli *lineární soustava*, je kolekce jedné nebo víc lineárních rovnic se stejnými proměnnými, např. $x_1, \dots, x_m$ (a s koeficienty z nějakého tělesa).
- Například následující soustava je lineární (zde předpokládáme, že koeficienty jsou z $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 7x_2 & & & - & \pi x_4 & = & -\sqrt{3} \\ & & -3x_2 & + & 17x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & = & \frac{11}{2} \end{array}$$

- **Poznámka:** Typograficky rovnice v soustavě obvykle uspořádáme tak, aby členy se stejnou proměnnou stály pod sebou (tj. vizuálně ve stejném sloupci).
- *Řešením* lineární soustavy s proměnnými $x_1, \dots, x_m$ je posloupnost čísel $s_1, \dots, s_m$ (ze stejného tělesa jako koeficienty soustavy) t.ž. každá rovnice soustavy je splněna, když za $x_1, \dots, x_m$ dosadíme čísla $s_1, \dots, s_m$.

Příklad

Uvažujme lineární soustavu

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}$$

s koeficienty v $\mathbb{R}$. Pak

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 5 \\ x_3 & = & 2 \end{array}$$

je řešením této soustavy.

Příklad

Uvažujme lineární soustavu

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

s koeficienty v $\mathbb{Z}_3$. Pak

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \end{array}$$

je řešením této soustavy.

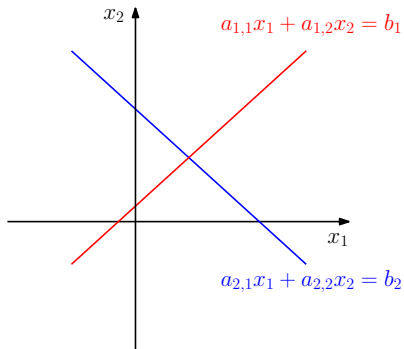
- *Množina řešení* soustavy lineárních rovnic je prostě množina všech řešení této soustavy.
- Budeme chtít popsat proceduru pro určení množiny řešení soustavy lineárních rovnic.
- Soustava lineárních rovnic může:
 - nemít žádné řešení, nebo
 - mít jediné řešení (tj. právě jedno řešení), nebo
 - mít víc než jedno řešení.
- Soustava, která **má alespoň jedno řešení**, je **řešitelná** (nebo **konzistentní**), zatímco soustava, která **nemá žádné řešení**, je **neřešitelná** (nebo **nekonzistentní**).

- Geometrická interpretace:
- Uvažujme následující soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma proměnnými a s **reálnými** koeficienty.

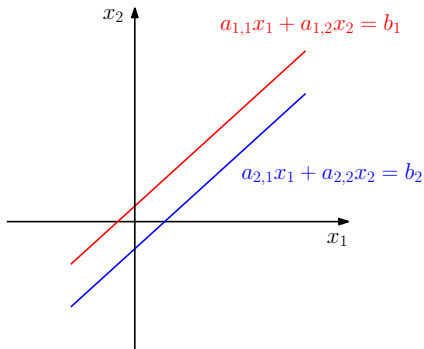
$$\begin{array}{rclcl} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

- Předpokládejme pro jednoduchost, že alespoň jedno z čísel $a_{1,1}, a_{1,2}$ je nenulové, a podobně, že alespoň jedno z čísel $a_{2,1}, a_{2,2}$ je nenulové.
- Pak každá ze dvou rovnic definuje přímku v rovině.
- Jsou tři možnosti:

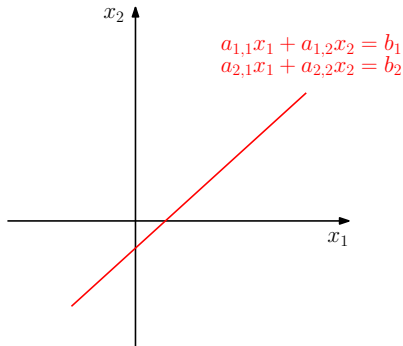
- Přímky jsou odlišné a protínají se.
 - Soustava má jediné řešení, a zejména je řešitelná.



- Přímky jsou různé a rovnoběžné.
 - Soustava nemá žádné řešení, tj. soustava je neřešitelná.



- Přímky splývají.
 - Soustava má nekonečný počet řešení, a zejména je řešitelná.



- Přímky mohou splývat i v případě, že rovnice nejsou totožné.
 - Např. $x_1 + x_2 = 1$ a $2x_1 + 2x_2 = 2$ definují stejnou přímku.

- Uvažujme nyní soustavu dvou rovnic s třemi proměnnými a s reálnými koeficienty.

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2\end{aligned}$$

- Pokud je alespoň jeden z koeficientů $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$ nenulový, a totéž platí pro $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, $a_{2,3}$, pak obě rovnice definují rovinu a jsou tři možnosti:
 - roviny jsou odlišné a protínat se v přímce (soustava má nekonečný počet řešení);
 - roviny odlišné a rovnoběžné (soustava nemá žádné řešení);
 - roviny splývají (soustava má nekonečný počet řešení).

- Uvažujme soustavu n lineárních rovnic s m proměnnými.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}$$

- S touto lineární soustavou jsou spojeny dvě matice: *matice koeficientů* a *rozšířená matice*.
- Matice koeficientů:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,m}x_m & = & b_2 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & b_n
 \end{array}$$

- Rozšířená matice:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} A & \mathbf{b} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right],$$

kde A je matice koeficientů a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- lineární soustava:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,m}x_m & = & b_2 \\
 & & & & & & \vdots & & \\
 a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & b_n
 \end{array}$$

- rozšířená matice:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n
 \end{array} \right]$$

- Lineární soustava je plně „zakódována“ svou rozšířenou maticí.
- Svislá tečkovaná čára je nepovinná, ale slouží jako užitečná vizuální pomůcka.

Příklad

Určete matici koeficientů a rozšířenou matici následující lineární soustavy (s koeficienty v $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení. Matice koeficientů:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozšířená matice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right].$$



- Dvě lineární soustavy (se stejnými proměnnými) jsou *ekvivalentní* právě tehdy, když mají stejnou množinu řešení.
- Uvažujme nyní následující lineární soustavu (s koeficienty v nějakém tělese $\mathbb{F}$).

$$\begin{array}{cccccccl}
 a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,m}x_m & = & b_2 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & b_n
 \end{array}$$

- Tuto soustavu bychom chtěli upravit tak, abychom dostali ekvivalentní soustavu, jejíž řešení je snadné vyčíst.
- Existují tři základní úpravy, které lze použít při upravování soustavy, aniž bychom změnili množinu řešení (tj. tyto úpravy vedou na ekvivalentní soustavu).

① Vyměníme (prohodíme) dvě rovnice.

- Např. vyměníme-li první a třetí rovnici:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ \frac{1}{2}x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{2}x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

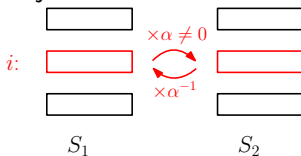
Je zřejmé, že tato úprava nezmění množinu řešení.

② Vynásobíme rovnici **nenulovým** číslem („skalárem“).

- Např. vynásobíme-li druhou rovnici skalárem 2:

$$\begin{array}{rccccccccc}
 x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 \frac{1}{2}x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\
 x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{rccccccccc}
 x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 x_1 & & & + & 4x_3 & = & 0 \\
 x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1
 \end{array}$$

- Proč tato úprava nemění množinu řešení?
- Předpokládejme, že jsme vynásobili i -tou rovnici soustavy S_1 skalárem $\alpha \neq 0$ a že jsme tím dostali soustavu S_2 .



- Vynásobíme-li i -tu rovnici soustavy S_2 skalárem α^{-1} (inverzním prvkem k α), dostaneme soustavu S_1 .
- Plyne, že každé řešení soustavy S_2 je zároveň řešením soustavy S_1 a naopak.

Varování: Nenásobte rovnici nulou, protože tohle „zničí“ rovnici!

③ Přičteme k jedné rovnici násobek jiné rovnice.

- Např. přičteme-li (-1) -násobek druhé rovnice ke třetí:

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 x_1 & & & + & 4x_3 & = & 0 \\
 x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{rclclcl}
 x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 x_1 & & & + & 4x_3 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -1
 \end{array}$$

- Proč tato úprava nemění množinu řešení?
- Předpokládejme, že jsme přičetli α -násobek i -té rovnice soustavy S_1 k j -té rovnici ($i \neq j$) a že jsme tím dostali soustavu S_2 .

R_i				$R'_i = R_i$
R_j				$R'_j = R_j + \alpha R_i$
	S_1		S_2	

- Přičteme-li $(-\alpha)$ -násobek i -té rovnice soustavy S_2 k j -té rovnici soustavy S_2 , dostaneme soustavu S_1 .
- Plyne, že každé řešení soustavy S_2 je zároveň řešením soustavy S_1 a naopak.

- Namísto soustav rovnic, lze také upravovat jejich rozšířené matice.
- Existují tři typy „elementárních řádkových úprav“ pro matice (s prvky z nějakého tělesa $\mathbb{F}$):
 - ① Výměna (prohození) dvou řádků.
 - Výměnu i -tého a j -tého řádku ($i \neq j$) značíme „ $R_i \leftrightarrow R_j$ “.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

② Násobení řádku **nenulovým** číslem (skalárem).

- Násobení i -tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ značíme „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ”.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2]{R_2 \rightarrow 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

③ Přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

- Přičtení α -tého násobku i -tého řádku k j -tému řádku ($i \neq j$) začíme „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ”.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 + (-1)R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array} \right]$$

Poznámka: Místo „ $R_3 \rightarrow R_3 + (-1)R_2$ ” lze psát prostě „ $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ ”.

- Elementární řádkové úpravy:
 - ① Výměna (prohození) dvou řádků.
 - Výměnu i -tého a j -tého řádku ($i \neq j$) značíme „ $R_i \leftrightarrow R_j$ ”.
 - ② Násobení řádku **nenulovým** číslem (skalárem).
 - Násobení i -tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ značíme „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ”.
 - ③ Přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.
 - Přičtení α -tého násobku i -tého řádku k j -tému řádku ($i \neq j$) začíme „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ”.

- **Poznámka:** Všechny elementární řádkové úpravy jsou vratné:
 - ① úprava „ $R_i \leftrightarrow R_j$ ” zvrátí sama sebe (aplikujeme-li tuto úpravu dvakrát, dostaneme původní matici);
 - ② úpravu „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ” ($\alpha \neq 0$) lze zvrátit úpravou „ $R_i \rightarrow \alpha^{-1} R_i$ ”;
 - ③ úpravu „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ” ($i \neq j$) lze zvrátit úpravou „ $R_j \rightarrow R_j - \alpha R_i$ ”.

- **Poznámka:**

- Řešení soustav lineárních rovnic je naší hlavní motivací pro zavedení elementárních řádkových úprav.
- Nicméně elementární řádkové úpravy lze aplikovat na **libovolnou** matici (s prvky v nějakém tělese), dokonce i na matici, kterou jsme nezískali jako rozšířenou matici nějaké lineární soustavy.
 - Tohle opravdu budeme dělat během toho a příštího semestru.
- Prozatím bude užitečné chápat elementární řádkové úpravy na maticích jako úspornější způsob provádění odpovídajících úprav na lineárních soustavách.

- **Terminologie/Značení:** Matice A a B jsou *řádkově ekvivalentní* (což značíme $A \sim B$), jestliže lze matici A převést na matici B pomocí elementárních řádkových úprav.
 - Řádkově ekvivalentní matice jsou vždy stejného typu (tj. mají stejný počet řádků a stejný počet sloupců) a jejich prvky musí patřit do stejného tělesa.
- **Poznámka:** Jsou-li dvě matice řádkově ekvivalentní a mají-li alespoň dva sloupce, pak „kódují“ ekvivalentní soustavy lineárních rovnic.
 - Přesněji: tyto dvě matice jsou rozšířenými maticemi ekvivalentních lineárních soustav.
- Matice, která má pouze jeden sloupec (tj. matice, která je sloupcovým vektorem), není rozšířenou maticí žádné lineární soustavy.
 - Nicméně, elementární řádkové úpravy lze aplikovat na sloupcové vektory.
 - Sloupcové vektory mohou být řádkově ekvivalentní.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Řádková ekvivalence je relace ekvivalence na množině $\mathbb{F}^{n \times m}$, neboli:

- Ⓐ [reflexivita] $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim A$;
- Ⓑ [symetrie] $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim B \implies B \sim A$;
- Ⓒ [tranzitivita] $\forall A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times m}: (A \sim B \wedge B \sim C) \implies A \sim C$.

Důkaz. (a) Nechť $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Vynásobíme-li první řádek matice A číslem 1 („ $R_1 \rightarrow 1R_1$ “), dostaneme A , a proto $A \sim A$.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Řádková ekvivalence je relace ekvivalence na množině $\mathbb{F}^{n \times m}$, neboli:

- Ⓐ [reflexivita] $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim A$;
- Ⓑ [symetrie] $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim B \implies B \sim A$;
- Ⓒ [tranzitivita] $\forall A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times m}: (A \sim B \wedge B \sim C) \implies A \sim C$.

Důkaz (pokračování). (b) Nechť $A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a předpokládejme, že $A \sim B$. Pak aplikováním nějaké posloupnosti elementárních řádkových úprav, třeba $R_1, \dots, R_k$, získáme matici B .

Ale víme, že elementární řádkové úpravy jsou vratné!

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$: nechť R'_i je elementární řádková úprava, která zvrátí R_i . Aplikujeme-li posloupnost $R'_k, \dots, R'_1$ elementárních řádkových úprav na matici B , získáme matici A . Plyne, že $B \sim A$.

Tvrzení 1

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. Řádková ekvivalence je relace ekvivalence na množině $\mathbb{F}^{n \times m}$, neboli:

- (a) [reflexivita] $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim A$;
- (b) [symetrie] $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}: A \sim B \implies B \sim A$;
- (c) [tranzitivita] $\forall A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times m}: (A \sim B \wedge B \sim C) \implies A \sim C$.

Proof (continued). (c) Nechť $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times m}$ a předpokládejme, že $A \sim B$ and $B \sim C$.

Jelikož $A \sim B$, víme, že B lze získat aplikací nějaké posloupnosti $R_1, \dots, R_k$ elementárních řádkových úprav na matici A .

Podobně, jelikož $B \sim C$, víme, že matici C lze získat aplikací nějaké posloupnosti $R_{k+1}, \dots, R_{k+l}$ elementárních řádkových úprav na matici B .

Aplikujeme-li posloupnost $R_1, \dots, R_k, R_{k+1}, \dots, R_{k+l}$ na matici A , získáme matici C . Plyne, že $A \sim C$. $\square$

- *Nulový řádek* matice je řádek, jehož prvky jsou pouze nuly.
- *Nenulový řádek* matice je řádek, který má alespoň jeden nenulový prvek.
- *Nulové* and *nenulové* sloupce jsou definovány analogicky.

- Matice $A = [a_{i,j}]_{n \times m}$ v $\mathbb{F}^{n \times m}$ (kde $\mathbb{F}$ je nějaké těleso) je v *odstupňovaném tvaru* pokud existují $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m$ t.ž.

$$a_{i,j} \begin{cases} \neq 0 & \text{když } i \leq r, j = j_i \\ = 0 & \text{když } i \leq r, j < j_i \\ = 0 & \text{když } i > r \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tady černé čtverce ($\blacksquare$) reprezentují nenulová čísla, zatímco hvězdičky (*) reprezentují libovolná čísla.
- Tedy každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí, a všechny nulové řádky (pokud existují) jsou umístěny dole.

- Matice $A = [a_{i,j}]_{n \times m}$ v $\mathbb{F}^{n \times m}$ (kde $\mathbb{F}$ je nějaké těleso) je v redukovaném odstupňovaném tvaru pokud existují $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m$ t.ž.

$$a_{i,j} \begin{cases} = 1 & \text{když } i \leq r, j = j_i \\ = 0 & \text{když } i \leq r, j < j_i \\ = 0 & \text{když } \exists k \in \{1, \dots, r\} \text{ t.ž. } i < k, j = j_k \\ = 0 & \text{když } i > r \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tady hvězdičky (*) reprezentují libovolná čísla.

$$\begin{bmatrix}
 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \quad
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

REF RREF

- REF = odstupňovaný tvar
 - anglicky: row echelon form
- RREF = redukovaný odstupňovaný tvar
 - anglicky: reduced row echelon form
- **Poznámka:** Každá matice v redukovaném odstupňovaném tvaru je zejména v odstupňovaném tvaru.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

- V našem diagramu pro matici v odstupňovaném tvaru (REF):
 - pozice černých čtverců ($\blacksquare$) se nazývají *pivoty*;
 - sloupce, které obsahují pivot („černý čtverec” - $\blacksquare$) se nazývají *bázické*, a ty ostatní sloupce jsou *nebázické*.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

Věta 2

Každá matice (jejíž prvky patří do nějakého tělesa) je řádkově ekvivalentní s právě jednou maticí v redukovaném odstupňovaném tvaru.

- Důkaz: vynechán.
 - Je to trochu složitější indukční důkaz (podle počtu sloupců). Nalezněte ho ve skriptech (Penev, Theorem 1.3.6 - nepovinná četba).

$$\begin{bmatrix}
 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \quad
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

REF RREF

- Dle Věty 2, libovolné matici A (jejíž prvky patří do nějakého tělesa) je řádkově ekvivalentní právě jedna matice v redukovaném odstupňovaném tvaru.
 - Tuto matici nazýváme *redukovaným odstupňovaným tvarem* matice A a značíme ji $\text{RREF}(A)$.
- Dále popíšeme algoritmus, který pro libovolnou matici A vypočítá $\text{RREF}(A)$.
- Než k tomu přistoupíme, uvedeme několik důsledků Věty 2.
 - Formální důkazy těchto důsledků vynecháme, ale v podstatě jednoduše plynou z Věty 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

Důsledek 3

Jsou-li dvě matice v odstupňovaném tvaru řádkové ekvivalentní, pak mají stejné pivoty.

- *Odstupňovaný tvar* matice A je libovolná matice v odstupňovaném tvaru, která je řádkově ekvivalentní s A .
 - Zatímco matice A má jediný **redukovaný** odstupňovaný tvar, A může mít více (nebo dokonce nekonečně mnoho) odstupňovaných tvarů.
 - Nicméně, dle Důsledku 3, všechny odstupňované tvary matice A jsou schematicky stejné: jejich „černé čtverce“ ($\blacksquare$), tj. pivoty, jsou na stejných pozicích.

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

- *Pivoty* libovolné matice A jsou pivoty libovolného odstupňovaného tvaru matice A .
- *Bázické sloupce* matice A jsou sloupce, které obsahují pivot, a ty ostatní sloupce jsou *nebázické*.
- Např. později uvidíme, že matice vpravo je jedním z odstupňovaných tvarů matice vlevo. Pivoty jsou zvýrazněny rámečkem, *bázické sloupce* jsou **červené**.

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & \boxed{1} & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & \boxed{-6} & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

- *Hodnost* matice A , značená $\text{rank}(A)$, je počet pivotů matice A (ekvivalentně: počet bázických sloupců matice A).
 - Ekvivalentně: $\text{rank}(A)$ je počet nenulových řádků v jakémkoliv odstupňovaném tvaru matice A .

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF

Důsledek 4

Nechť $\mathbb{F}$ je těleso. $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$:

$$A \sim B \iff \text{RREF}(A) = \text{RREF}(B).$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{REF}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{RREF}$$

- Teď popíšeme algoritmus (tzv. **Gaussovu–Jordanovu eliminaci**), který pro libovolnou matici A (s prvky v nějakém tělese) vypočítá $\text{RREF}(A)$.
- Algoritmus má dvě části: dopřednou a zpětnou fázi.
- Dopředná fáze (která se také nazývá *Gaussova eliminace*) vypočítá nějaký odstupňovaný tvar matice A .
- Zpětná fáze vypočítá **redukovaný** odstupňovaný tvar matice A , tj. $\text{RREF}(A)$.

Gaussova-Jordanova eliminace:

- **Dopředná fáze (Gaussova eliminace):**

- 1 Začněte s nejlevějším nenulovým sloupcem. Tento sloupec je bázický. Pivot je v nejvyšším nenulovém řádku tohoto sloupce.
- 2 Vyberte v bázickém sloupci nenulový prvek a (je-li to nutné) prohoďte řádky tak, aby se tento prvek přesunul do pivotu.
- 3 Pomocí elementárních řádkových úprav tvaru „ $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$ ” (kde řádek i obsahuje pivot, řádek j je pod řádkem i a α je vhodný skalár) vytvořte nuly ve všech pozicích pod pivotem.
- 4 „Zakryjte” (ignorujte) řádek obsahující pivot i všechny řádky nad ním. Poté aplikujte kroky 1-4 na podmatici, která zůstane. Postup opakujte, dokud nezpracujete všechny nenulové řádky.

- **Zpětná fáze:**

- 5 Začněte bázickým sloupcem, postupujte směrem vzhůru a doleva a vytvořte nuly nad každým pivotem. Není-li prvek v pivotu roven 1, upravte řádek násobením vhodným nenulovým skalárem tak, aby prvek v pivotu byl roven 1 (úprava „ $R_i \rightarrow \alpha R_i$ ” pro vhodné $\alpha \neq 0$).

Příklad

Aplikujte Gaussovu-Jordanovu eliminaci na **reálnou** matici A , abyste vypočítali $\text{RREF}(A)$.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Řešení. Nejdřív aplikujeme dopřednou fázi algoritmu (tj. Gaussovu eliminaci), abychom vypočítali odstupňovaný tvar matice A .

Řešení (pokračování). Dopředná fáze (Gaussova eliminace):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{3}{2}R_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dopředná fáze algoritmu je ukončená: naše matice je v odstupňovaném tvaru.

Řešení (pokračování). Zpětná fáze:

$$A \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dle} \\ \text{dopředné} \\ \text{fázy} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 6R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & 0 & 17 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 11 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 14 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Příklad

Aplikujte Gaussovu-Jordanovu eliminaci na **reálnou** matici A , abyste vypočítali $\text{RREF}(A)$.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 13 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Řešení (pokračování). Zpětná fáze algoritmu je ukončená: naše matice je v redukovaném odstupňovaném tvaru.

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



Příklad

Aplikujte Gaussovu-Jordanovu eliminaci na matici B (s prvky v $\mathbb{Z}_3$), abyste vypočítali $\text{RREF}(B)$.

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Budou užitečné sčítací a násobící tabulky pro $\mathbb{Z}_3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Řešení. Dopředná fáze (Gaussova eliminace):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_4 \rightarrow R_4 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$



matice je v
odstupňovaném
tvaru

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Řešení (pokračování). Zpětná fáze:

$$B \quad (*) \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dle
dopředné
fáze

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



matice je v
redukováném
odstupňovaném
tvaru

$$\Rightarrow \text{RREF}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



- Pro další příklady, viz skripta (Penev, oddíl 1.3.3).

- Jak vyřešíme lineární soustavu?
- Nejprve vytvoříme rozšířenou matici lineární soustavy a pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace ji převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru (RREF).
- Poté „přeložíme“ matici (v RREF) zpět na lineární soustavu.
- Lineární soustava, kterou tímto způsobem získáme, je ekvivalentní s původní lineární soustavou.
- Nyní určíme množinu řešení.

① Je-li poslední/nejpravější sloupec (tedy ten, který je vpravo od svislé tečkované čáry) **bázický**, pak je soustava neřešitelná, tj. nemá žádné řešení.

- Např. předpokládejme, že jsme Gaussovou-Jordanovou eliminací dostali následující reálnou matici.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tato matice je rozšířenou maticí následující lineární soustavy:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Kvůli rovnici „ $0 = 1$ ” je tato soustava neřešitelná.

- ② Je-li poslední (nejpravější) sloupec (tedy ten, který je vpravo od svislé tečkované čáry) **nebázický**, ale všechny ostatní sloupce **jsou** bážické, pak má soustava právě jedno řešení.
- Příklad: na příštím slajdu!

- Např. předpokládejme, že jsme Gaussovou-Jordanovou eliminací dostali následující reálnou matici.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tato matice je rozšířenou maticí následující lineární soustavy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -5 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 3 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Tato soustava je řešitelná a má právě jedno řešení, které lze ihned vyčíst.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -5 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 3 \end{array}$$

- ③ Je-li poslední (nejpravější) sloupec (tedy ten, který je vpravo od svislé tečkované čáry) **nebázický**, a zároveň je alespoň jeden další sloupec **nebázický**, pak má soustava víc než jedno řešení, které lze vyčíst takto.
- Proměnné, které odpovídají **nebázickým** sloupcům, nazýváme *volné proměnné*. Volné proměnné mohou mít libovolné hodnoty. Tyto hodnoty se nazývají *parametry* a značíme je písmeny, například r, s, t .
 - Proměnné, které odpovídají **bázickým** sloupcům, nazýváme *bázické proměnné* a určíme je pomocí parametrů (odpovídajících volným proměnným).
 - Tento typ řešení nazýváme *obecné řešení*.
- ④ Příklad: na příštím slajdu!

- Např. předpokládejme, že jsme Gaussovou–Jordanovou eliminací dostali následující reálnou matici:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tato matice je rozšířenou maticí následující lineární soustavy:

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & 2x_2 & & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ & & & & & x_3 & - & x_4 & + & 7x_5 & = & -3 \\ & & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Tato soustava je řešitelná a má víc než jedno řešení.

Proměnné x_2, x_4, x_5 jsou **volné**, zatímco ostatní proměnné jsou **bázické**. Nyní vyčteme obecné řešení takto:

$$x_1 = -2r - 5s - 6t$$

$$x_2 = r$$

$$x_3 = s - 7t - 3$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

kde $r, s, t \in \mathbb{R}$.

- Z předchozího slajdu:

$$x_1 = -2r - 5s - 6t$$

$$x_2 = r$$

$$x_3 = s - 7t - 3$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

kde $r, s, t \in \mathbb{R}$.

- **Poznámka:** Nezapomeňte uvést, do jakého tělesa patří parametry! Tady máme „ $r, s, t \in \mathbb{R}$ “, protože koeficienty naší soustavy jsou reálné.

- Určení počtu řešení lineární soustavy:
 - Neřešitelná soustava nemá žádné řešení (počet řešení je nula).
 - Řešitelná soustava může mít jediné řešení (tj. právě jedno řešení) nebo více než jedno řešení.
 - Řešitelná soustava, která **nemá žádné volné proměnné**, má jediné řešení (tj. počet řešení je jedna).
 - Řešitelná soustava, která **má alespoň jednu volnou proměnnou**, má více než jedno řešení, protože každá volná proměnná může mít libovolnou hodnotu z daného tělesa $\mathbb{F}$.
 - Je-li naše těleso $\mathbb{F}$ nekonečné (např. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$), pak řešitelná soustava, která má alespoň jednu volnou proměnnou, má nekonečně mnoho řešení.
 - Je-li naše těleso $\mathbb{F}$ konečné a je-li zároveň lineární soustava řešitelná a má právě k volných proměnných, pak je počet řešení soustavy právě $|\mathbb{F}|^k$ (kde $|\mathbb{F}|$ je kardinalita tělesa $\mathbb{F}$, tj. počet prvků tělesa $\mathbb{F}$).
 - Zejména, pokud $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ pro nějaké prvočíslo p , pak řešitelná soustava, která má právě k volných proměnných, má právě p^k řešení.

Příklad

Vyřešte následující lineární soustavu s koeficienty v $\mathbb{Z}_3$ a určete počet jejích řešení.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Řešení. Rozšířená matice soustavy je:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

V dřívějším příkladu jsme vypočítali:

$$\text{RREF}(B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Řešení (pokračování). Připomínka:

$$\text{RREF}(B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Poslední sloupec (tj. sloupec, který je doprava od svislé tečkované čáry) je nebázický, a proto je naše lineární soustava řešitelná.

Bázické sloupce jsou první, druhý a třetí sloupec, a tedy jsou proměnné x_1, x_2, x_3 bázické, zatímco je x_4 volná.

$\text{RREF}(B)$ je rozšířená matice následující lineární soustavy:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & & & = & 2 \\ & & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Tato soustava je ekvivalentní naší původní soustavě.

Řešení (pokračování). Připomínka:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_3 & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Proměnné x_1, x_2, x_3 jsou bazické, zatímco je x_4 volná.

Obecné řešení naší lineární soustavy je:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & t + 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & t \end{array} \quad \text{kde } t \in \mathbb{Z}_3.$$

Naše lineární soustava je řešitelná a má **jednu** volnou proměnnou. Jelikož těleso $\mathbb{Z}_3$ má **tři** prvky, počet řešení je $3^1 = 3$. $\square$

- *Homogenní lineární soustava* je lineární soustava tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & 0 \\
 a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,m}x_m & = & 0 \\
 & & & & & & \vdots & & \\
 a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & 0
 \end{array}$$

kde koeficienty $a_{i,j}$ patří do nějakého tělesa $\mathbb{F}$ (a 0 také patří do stejného tělesa $\mathbb{F}$).

- Taková soustava je vždycky řešitelná, protože má alespoň tzv. „triviální řešení“, tj. řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.
- *Netriviální řešení* homogenní lineární soustavy je řešení, které není triviální.
- Některé homogenní lineární soustavy mají pouze triviální řešení, zatímco jiné také mají netriviální řešení.
 - Záleží to na tom, zda soustava má volné proměnné.
- Když řešíme homogenní lineární soustavy, stačí pracovat s **maticí koeficientu** namísto rozšířené matice.

Příklad

Vyřešte následující homogenní lineární soustavu s reálnými koeficienty.

$$\begin{array}{rcccccl} 2x_1 & - & 4x_2 & & & + & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Kolik řešení má tato lineární soustava? Má netriviální řešení?

Řešení. **Matice koeficientů** této homogenní lineární soustavy je

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ted' na tuto matici aplikujeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci.

Řešení (pokračování).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{2} R_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Poslední matice je v redukovaném odstupňovaném tvaru. Plyne, že

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Řešení (pokračování). Připomínka:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix},$
- $\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$

Poznámka:

- Matice A je **matice koeficientů** naší homogenní lineární soustavy.
- **Rozšířená matice** této soustavy je $[A \mid \mathbf{0}]$.
- Jelikož elementární řádkové úpravy nemění nulový sloupec, platí $\text{RREF}([A \mid \mathbf{0}]) = [\text{RREF}(A) \mid \mathbf{0}]$.

Řešení (pokračování). Připomínka:

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nyní pokračujeme ve výpočtu. Bázické sloupce matice $\text{RREF}(A)$ jsou první a třetí sloupec. Plyne, že x_1, x_3 jsou bázické proměnné, zatímco x_2, x_4 jsou volné proměnné. Dále vidíme z matice $\text{RREF}(A)$, že naše původní homogenní lineární soustava je ekvivalentní následující soustavě.

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & - & 2x_2 & & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Nyní můžeme vyčíst obecné řešení:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2s - 3t \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & 4t \\ x_4 & = & t \end{array} \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Příklad

Vyřešte následující homogenní lineární soustavu s reálnými koeficienty.

$$\begin{array}{rcccccccl} 2x_1 & - & 4x_2 & & & + & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Kolik řešení má tato lineární soustava? Má netriviální řešení?

Řešení (pokračování). Připomínka:

$$x_1 = 2s - 3t$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = 4t$$

$$x_4 = t \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož má naše lineární soustava volné proměnné (zejména dvě) a naše těleso $\mathbb{R}$ je nekonečné, vidíme, že naše lineární soustava má nekonečně mnoho řešení. Zejména má naše soustava netriviální řešení (dokonce jich má nekonečně mnoho). $\square$