Lineární algebra 1: Zkouška

ZS 2025/26

16.01.2026

Jméno a příjmení: ______________________________

- Tato zkouška je písemná: hodnotí se pouze to, co napíšete; o ústní zkoušení nemůžete žádat.
- Na konci zkoušky musíte odevzdat tento list a sešit, který jste dostali. Nezapomeňte oba podepsat.
- **Všechny odpovědi musí být (písemně) zdůvodněny.** Za správnou odpověď, kterou jste nezdůvodnili, nedostanete žádné body.[1]
- Kromě tohoto listu a sešitu, který jste dostali, u sebe můžete mít pouze psací potřeby (propisku, tužku, gumu apod.) a pití.
- Tašky a batohy nechejte v přední části místnosti. Mobilní telefony apod. nechejte ve své tašce/batohu nebo na katedře.
- Na této zkoušce nejsou povoleny žádné knihy, poznámky ani elektronická zařízení jakéhokoli druhu (kalkulačky, mobilní telefony, tablety, notebooky apod.). **Každý, kdo bude přistižen s knihou, poznámkami nebo elektronickým zařízením jakéhokoli druhu (i vypnutým nebo nefunkčním), automaticky dostane 4 a může být podroben disciplinárnímu řízení.**
- Můžete psát pouze ve sešitu, který jste dostali, nebo na tomto listu. **Hodnotí se pouze to, co napíšete ve sešitu** (přeškrtněte všechno, co nechcete, aby bylo hodnoceno). Na tomto listu můžete psát poznámky pro sebe, ale ty se nehodnotí.
- **Pokud se rozhodnete, že si nepřejete, aby vaše zkouška byla hodnocena, pak přeškrtněte veškerý text, který jste napsali, a na první stránku sešitu napište „NEHODNOTIT“.** Toto musíte udělat před odevzdáním sešitu a tohoto listu (e-maily zaslané po skončení zkoušky se nepočítají). Pokud tak učiníte, v SISu dostanete **„propadlý termín“** (ale žádnou známku). Pokud jakákoli část vaší práce nebude přeškrtnuta, bude ohodnocena nepřeškrtnutá část práce (a známka bude zapsána do SISu), i v případě, že jste napsali „NEHODNOTIT“. Bude-li vaše zkouška ohodnocena, pak zapsanou známku v SISu nelze zrušit ani změnit (s výjimkou zjevné chyby v hodnocení). Zejména platí, že pokud u zkoušky uspějete, nemůžete ji zopakovat za účelem zlepšení známky. Pokud u zkoušky neuspějete, vaše čtyřka ze SISu nemůže být odstraněna.[2]

[1] Platí to mimo jiné pro upravování matic.

[2] Pokud u zkoušky neuspějete, ale uspějete při některém z dalších pokusů, zůstane v SISu zaznamenána jak čtyřka z tohoto pokusu, tak i úspěšná známka z pozdějšího pokusu.

- Maximální počet bodů je 100, přičemž:
  - 80–100 bodů = 1
  - 65–79 bodů = 2
  - 50–64 bodů = 3
  - 0–49 bodů = 4
- Během zkoušky **nemůžete** opouštět místnost. Pokud se rozhodnete opustit místnost, svůj sešit a tento list musíte odevzdat a nemůžete se vrátit, abyste zkoušku dokončili.
- Máte **90 minut**. Pokud zkoušku dokončíte během prvních **70 minut**, můžete svoji práci odevzdat a odejít. Nicméně abyste nerušili ostatní studenty, neopouštějte místnost během posledních 20 minut.
- Hodně štěstí!

Úloha 1 (10 bodů)**.** *Uvažujme následující permutaci:*

$$\pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) [5 bodů] Vypočítejte rozložení permutace π na cykly.

(b) [5 bodů] Vypočítejte sgn(π), tj. znaménko permutace π.

Úloha 2 (30 bodů)**.** *Uvažujme následující polynomy a matice s koeficienty/prvky v $\mathbb{Z}_2$:*

- $p_1(x) = x^3 + x + 1$;
- $p_2(x) = x^3 + x^2 + x$;
- $p_3(x) = x^2 + 1$;
- $p_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
- $p_5(x) = x^3 + x^2 + 1$;

- $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
- $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
- $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
- $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) [15 bodů] Dokažte, že existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, které splňuje

$$f\big(p_i(x)\big) = M_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 5\}.$$

(b) [10 bodů] Nalezněte vzorec pro f, tj. nahraďte otázníky vhodnými výrazy:

$$f\Big(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\Big) \;=\; \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \qquad \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2.$$

(c) [5 bodů] Rozhodněte, zda f je isomorfismus.

Poznámka č.1: *Nezapomeňte, že pracujete nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Tedy počítáte modulo 2.*

Poznámka č.2: *Používáte-li souřadnicové vektory, nezapomeňte uvést **<u>bázi</u>**, vzhledem ke které tyto vektory počítáte.*

Značení:

- $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}_2}$ = *vektorový prostor (nad tělesem $\mathbb{Z}_2$) polynomů stupně nejvýše 3 s koeficienty z tělesa $\mathbb{Z}_2$*
- $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ = *vektorový prostor (nad tělesem $\mathbb{Z}_2$) matic typu 2×2 s prvky z tělesa $\mathbb{Z}_2$*

Úloha 3 (20 bodů). *Uvažujme následující reálnou matici:*

$$A \;:=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

(a) [10 bodů] Rozhodněte, zda platí $Col(A) \cong Row(A)$ *a zdůvodněte svoji odpověď.*

(b) [10 bodů] Rozhodněte, zda platí $Col(A) \cong Nul(A)$ *a zdůvodněte svoji odpověď.*

Značení:

- $Col(A)$ = *sloupcový prostor matice* A
- $Row(A)$ = *řádkový prostor matice* A
- $Nul(A)$ = *jádro matice* A
- $\cong$ = *je isomorfní s*

Úloha 4 (20 bodů). *Nechť* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru* V *nad tělesem* $\mathbb{F}$. *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *a položme*

- $\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1$,
- $\mathbf{y}_2 := \mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$,
- $\mathbf{y}_3 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{x}_3$.

Dokažte, že vektory $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ *jsou lineárně nezávislé.*

Poznámka: *Nezapomeňte explicitně uvést, kde používáte skutečnost, že skaláry* α *a* β *jsou* ***nenulové****.*

Úloha 5 (20 bodů). *Nechť* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *jsou lineárně nezávislé vektory v* $\mathbb{R}^8$. *Dokažte, že existuje surjektivní lineární zobrazení* $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^3$, *které splňuje* $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$.

Terminologie: *surjektivní zobrazení = zobrazení na*

Nápověda: *Nejprve budete potřebovat bázi prostoru* $\mathbb{R}^8$ *(pozor: ne libovolnou).*