

# Lineární algebra 1: Zkouška - ŘEŠENÍ

ZS 2025/26

16.01.2026

**Úloha 1** (10 bodů). *Uvažujme následující permutaci:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) [5 bodů] *Vypočítejte rozložení permutace  $\pi$  na cykly.*

(b) [5 bodů] *Vypočítejte  $\text{sgn}(\pi)$ , tj. znaménko permutace  $\pi$ .*

*Řešení.*

(a)  $\pi = (123)(4)(576)$

(b)  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{7-3} = 1$

□

**Úloha 2** (30 bodů). *Uvažujme následující polynomy a matice s koeficienty/prvky v  $\mathbb{Z}_2$ :*

•  $p_1(x) = x^3 + x + 1;$

•  $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$

•  $p_2(x) = x^3 + x^2 + x;$

•  $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$

•  $p_3(x) = x^2 + 1;$

•  $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$

•  $p_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$

•  $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

•  $p_5(x) = x^3 + x^2 + 1;$

•  $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

(a) [15 bodů] *Dokažte, že existuje právě jedno lineární zobrazení  $f : \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ , které splňuje*

$$f(p_i(x)) = M_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\}.$$

(b) [10 bodů] *Nalezněte vzorec pro  $f$ , tj. nahradte otázníky vhodnými výrazy:*

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2.$$

(c) [5 bodů] Rozhodněte, zda  $f$  je isomorfismus.

**Poznámka č.1:** Nezapomeňte, že pracujete nad tělesem  $\mathbb{Z}_2$ . Tedy počítáte modulo 2.

**Poznámka č.2:** Používáte-li souřadnicové vektory, nezapomeňte uvést **bázi**, vzhledem ke které tyto vektory počítáte.

**Značení:**

- $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^3$  = vektorový prostor (nad tělesem  $\mathbb{Z}_2$ ) polynomů stupně nejvýše 3 s koeficienty z tělesa  $\mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$  = vektorový prostor (nad tělesem  $\mathbb{Z}_2$ ) matic typu  $2 \times 2$  s prvky z tělesa  $\mathbb{Z}_2$

**Řešení.** V našem řešení budeme používat bázi  $\mathcal{P} := \{1, x, x^2, x^3\}$  prostoru  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^3$  a bázi

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

prostoru  $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ .

(a) Budeme řešit matici  ${}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}}$ . Požadujeme, aby lineární zobrazení  $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$  splňovalo  $f(p_i(x)) = M_i$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , a tedy aby (neznámá) matice  ${}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}}$  splňovala

$${}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}} [p_i(x)]_{\mathcal{P}} = [M_i]_{\mathcal{M}}$$

pro všechna  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . To je ekvivalentní rovnosti

$${}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} [p_1(x)]_{\mathcal{P}} & \dots & [p_5(x)]_{\mathcal{P}} \end{bmatrix}}_{=:P} = \underbrace{\begin{bmatrix} [M_1]_{\mathcal{M}} & \dots & [M_5]_{\mathcal{M}} \end{bmatrix}}_{=:M}.$$

Matice  $P$  a  $M$  zde lze snadno vypočítat, zatímco matice  ${}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}}$  je neznámá, kterou potřebujeme určit. Nejprve transponujeme obě strany rovnice, čímž dostáváme

$$P^T \left( {}_{\mathcal{M}}[f]_{\mathcal{P}} \right)^T = M^T.$$

Nyní spočítáme:

$$\begin{aligned} [P^T \mid M^T] &= \left[ \begin{array}{c|c} [p_1(x)]_{\mathcal{P}}^T & [M_1]_{\mathcal{M}}^T \\ \vdots & \vdots \\ [p_5(x)]_{\mathcal{P}}^T & [M_5]_{\mathcal{M}}^T \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\stackrel{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 + R_1 \\ \sim}}{\sim} \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\
R_5 \rightarrow R_5 + R_2 \\
\sim
\end{array}
\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
\text{prohození} \\
\text{řádků} \\
\sim
\end{array}
\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
R_1 \rightarrow R_1 + R_4 \\
R_2 \rightarrow R_2 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\
\sim
\end{array}
\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right],$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{=\text{RREF}([P^T \mid M^T])}$$

z čehož plyne, že

$$(\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a tedy

$$\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z existence a jedinečnosti matice  $\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}}$  plyne, že existuje právě jedno lineární zobrazení  $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ , které splňuje  $f(p_i(x)) = M_i$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, 5\}$ .

(b) Pro všechna  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2$  platí:

$$\begin{aligned}
[f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)]_{\mathcal{M}} &= \mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}} [a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0]_{\mathcal{P}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 \\ a_0 + a_3 \end{bmatrix} \\
&= \left[ \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 & a_0 + a_3 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Jelikož je zobrazení  $[\cdot]_{\mathcal{M}}$  prosté (protože je isomorfismem), plyne, že

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 & a_0 + a_3 \end{bmatrix} \quad \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2.$$

(c) Nejprve spočítáme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

a tedy

$$\text{rank}(\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}}) = 4,$$

tj.  $\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}}$  je čtvercová matice plné hodnosti. Plyne, že matice  $\mathcal{M}[f]_{\mathcal{P}}$  je regulární, a tedy je lineární zobrazení  $f$  isomorfismem.  $\square$

**Úloha 3** (20 bodů). *Uvažujme následující reálnou matici:*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

(a) [10 bodů] Rozhodněte, zda platí  $\text{Col}(A) \cong \text{Row}(A)$  a zdůvodněte svoji odpověď.

(b) [10 bodů] Rozhodněte, zda platí  $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$  a zdůvodněte svoji odpověď.

**Značení:**

- $\text{Col}(A)$  = sloupcový prostor matice  $A$
- $\text{Row}(A)$  = řádkový prostor matice  $A$
- $\text{Nul}(A)$  = jádro matice  $A$
- $\cong$  = je isomorfní s

*Řešení.* Matice  $A$  je v odstupňovaném tvaru, a je zřejmé, že  $\text{rank}(A) = 4$ .

(a)  $\text{Col}(A)$  a  $\text{Row}(A)$  jsou konečnědimenzionální vektorové prostory nad stejným tělesem (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ), a víme, že platí

$$\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)).$$

Plyne, že  $\text{Col}(A) \cong \text{Row}(A)$ .

(b)  $\text{Col}(A)$  a  $\text{Nul}(A)$  jsou konečnědimenzionální vektorové prostory nad stejným tělesem (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ), a tedy platí následující ekvivalence:

$$\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A) \iff \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Nul}(A)).$$

Víme, že platí  $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rank}(A) = 4$ , a z věty o hodnotě matice a dimenzi jádra („rank-nullity“) plyne, že

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = 8,$$

a tedy

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 8 - \text{rank}(A) = 8 - 4 = 4.$$

Dokázali jsme, že  $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Nul}(A)) = 4$ , a tedy platí  $\text{Col}(A) \cong \text{Nul}(A)$ .  $\square$

**Úloha 4** (20 bodů). *Nechť  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru  $V$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Nechť  $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  a položme*

- $\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1$ ,
- $\mathbf{y}_2 := \mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$ ,
- $\mathbf{y}_3 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{x}_3$ .

*Dokažte, že vektory  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$  jsou lineárně nezávislé.*

**Poznámka:** *Nezapomeňte explicitně uvést, kde používáte skutečnost, že skaláry  $\alpha$  a  $\beta$  jsou nenulové.*

*Řešení.* Nechť skaláry  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$  jsou takové, že platí

$$\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \alpha_3\mathbf{y}_3 = \mathbf{0},$$

tj.

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2(\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2) + \alpha_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{x}_3) = \mathbf{0}.$$

Plyne, že

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{x}_1 + (\alpha_2\alpha + \alpha_3)\mathbf{x}_2 + (\alpha_3\beta)\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}.$$

Jelikož jsou vektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  lineárně nezávislé, plyne, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2\alpha + \alpha_3 = \alpha_3\beta = 0.$$

Jelikož platí  $\alpha_3\beta = 0$  a  $\beta \neq 0$ , vidíme, že  $\alpha_3 = 0$ . Tedy  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2\alpha = 0$ . Jelikož  $\alpha_2\alpha = 0$  a  $\alpha \neq 0$ , plyne, že  $\alpha_2 = 0$ , a tedy  $\alpha_1 = 0$ .

Dokázali jsme, že  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , a tedy jsou vektory  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$  lineárně nezávislé.  $\square$

**Úloha 5** (20 bodů). Necht  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  jsou lineárně nezávislé vektory v  $\mathbb{R}^8$ . Dokažte, že existuje surjektivní lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které splňuje  $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ .

**Terminologie:** surjektivní zobrazení = zobrazení na

**Nápověda:** Nejprve budete potřebovat bázi prostoru  $\mathbb{R}^8$  (pozor: ne libovolnou).

*Řešení.* Víme, že  $\dim(\mathbb{R}^8) = 8$  a  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , tj. každá báze prostoru  $\mathbb{R}^8$  má právě 8 vektorů, zatímco každá báze prostoru  $\mathbb{R}^3$  má právě 3 vektory. Nejprve lineárně nezávislou množinu  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  rozšíříme do nějaké báze, třeba  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5\}$ , prostoru  $\mathbb{R}^8$ . Dále uvažujeme libovolnou bázi  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Jelikož je  $\mathcal{B}$  báze prostoru  $\mathbb{R}^8$ , víme, že existuje právě jedno lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které splňuje:

- $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0}$ ;
- $f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{c}_1$ ;
- $f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{c}_2$ ;
- $f(\mathbf{b}_5) = \mathbf{c}_3$ .

Zbývá ukázat, že  $f$  je surjektivní. Všimněme si, že platí:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &= f[\mathbb{R}^8] \\
 &\stackrel{(*)}{=} f[\text{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5)] \\
 &= \text{Span}(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}), f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_5)) \\
 &= \text{Span}(\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_5, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \\
 &= \text{Span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \\
 &\stackrel{(**)}{=} \mathbb{R}^3,
 \end{aligned}$$

kde (\*) plyne ze skutečnosti, že  $\mathcal{B}$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^8$ , zatímco (\*\*) plyne ze skutečnosti, že  $\mathcal{C}$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Tím jsme dokázali, že zobrazení  $f$  je surjektivní.  $\square$